2007 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. 如果 $\left(3x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)^n$ 的展开式中含有非零常数项, 则正整数 n 的最小值为 ( )

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 10

2. 将 $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{\pi}{4},-2\right)$ 平移, 则平移后所得图象的解析式为 ( )

(A) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)-2$ (B) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

(C) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)-2$ (D) $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{12}\right)+2$

3. 设 P 和 Q 是两个集合, 定义集合 $P-Q=\{x\mid x\in P$, 且 $x\notin Q\}$, 如果 $P=\{x\mid \log_2 x<1\}$, $Q=\{x\mid |x-2|<1\}$, 那么 $P-Q$ 等于 ( )

(A) $\{x\mid 0<x<1\}$ (B) $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$

(C) $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$

4. 平面 α 外有两条直线 m 和 n, 如果 m 和 n 在平面 α 内的射影分别是 m' 和 n', 给出下列四个命题:

① $m'\perp n'\Rightarrow m\perp n$;
② $m\perp n\Rightarrow m'\perp n'$;
③ m' 与 n' 相交 $\Rightarrow m$ 与 n 相交或重合;
④ m' 与 n' 平行 $\Rightarrow m$ 与 n 平行或重合.

其中不正确的命题个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 已知 p 和 q 是两个不相等的正整数, 且 $q\geqslant 2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p-1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^q-1}$ $=$ ( )

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{p}{q}$ (D) $\dfrac{p-1}{q-1}$

6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=p$ (p 为正常数, $n\in\mathbf{N}^*$), 则称 $\{a_n\}$ 为“等方比数列”. 甲: 数列 $\{a_n\}$ 是等方比数列; 乙: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 ( )

(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件

(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件

(C) 甲是乙的充要条件

(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 双曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左准线为 l, 左焦点和右焦点分别为 F_1 和 F_2; 抛物线 C_2 的准线为 l, 焦点为 F_2; C_1 与 C_2 的一个交点为 M, 则 $\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_1|}-\dfrac{|MF_1|}{|MF_2|}$ 等于 ( )

(A) -1 (B) 1 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项分别为 A_n 和 B_n, 且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$, 则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. 连掷两次骰子得到的点数分别为 m 和 n, 记向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角为 θ, 则 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的概率是 ( )

(A) $\dfrac{5}{12}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{7}{12}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

10. 已知直线 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (a, b 是非零常数) 与圆 $x^2+y^2=100$ 有公共点, 且公共点的横坐标均为整数, 那么这样的直线共有 ( )

(A) 60 条 (B) 66 条 (C) 72 条 (D) 78 条

二、填空题

11. 已知函数 $y=2x-a$ 的反函数是 $y=bx+3$, 则 $a=$______; $b=$______.

12. 复数 $z=a+b\mathrm{i}$, a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $b\neq 0$, 若 z^2-4bz 是实数, 则有序实数对 (a,b) 可以是______. (写出一个有序实数对即可)

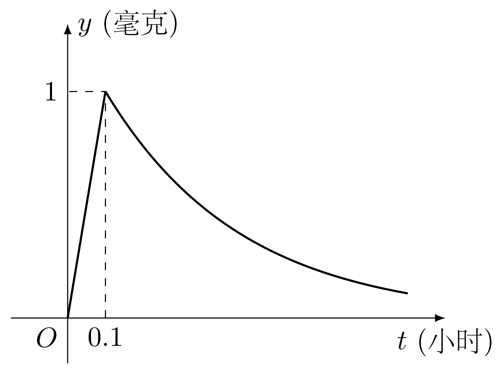
13. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+3\geqslant 0,\\ x+y\geqslant 0,\\ -2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则目标函数 $2x+y$ 的最小值为______.

14. 某男运动员在三分线投球的命中率是 $\dfrac{1}{2}$, 他投球 10 次, 恰好投进 3 个球的概率______. (用数值作答)

15. 为了预防流感, 某学校对教室用药薰消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中, 室内每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 成正比; 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{t-a}$ (a 为常数), 如图所示. 据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 从药物释放开始, 每立方米空气中的含药量 y (毫克) 与时间 t (小时) 之间的函数关系式为______;

(2) 据测定, 当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时, 学生方可进教室, 那么药物释放开始, 至少需要经过______小时后, 学生才能回到教室.



三、解答题

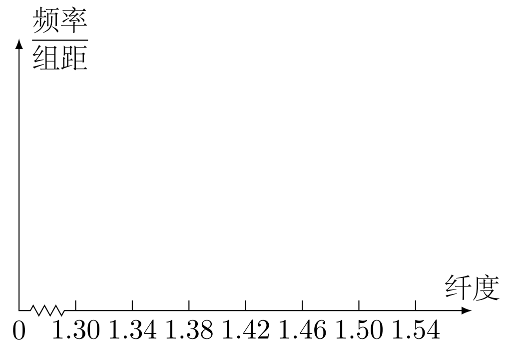
16. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant 6$, 设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ.

(1) 求 θ 的取值范围;

(2) 求函数 $f(\theta)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

17. 在生产过程中, 测得纤维产品的纤度 (表示纤维粗细的一种量) 共有 100 个数据, 将数据分组如下表:

分组	频数	频率
$[1.30,1.34)$	4	
$[1.34,1.38)$	25	
$[1.38,1.42)$	30	
$[1.42,1.46)$	29	
$[1.46,1.50)$	10	
$[1.50,1.54)$	2	
合计	100	



(1) 补全频率分布表, 并画出频率分布直方图;

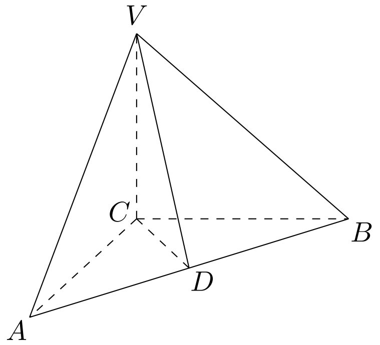
(2) 估计纤度落在 $[1.38,1.50)$ 中的概率及纤度小于 1.40 的概率是多少?

(3) 统计方法中, 同一组数据常用该组区间的中点值 (例如区间 $[1.30,1.34)$ 的中点值是 1.32) 作为代表. 据此, 估计纤度的期望.

18. 如图, 在三棱锥 $V-ABC$ 中, $VC\perp$ 底面 ABC, $AC\perp BC$, D 是 AB 的中点, 且 $AC=BC=a$, $\angle VDC=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求证: 平面 $VAB\perp$ 平面 VCD;

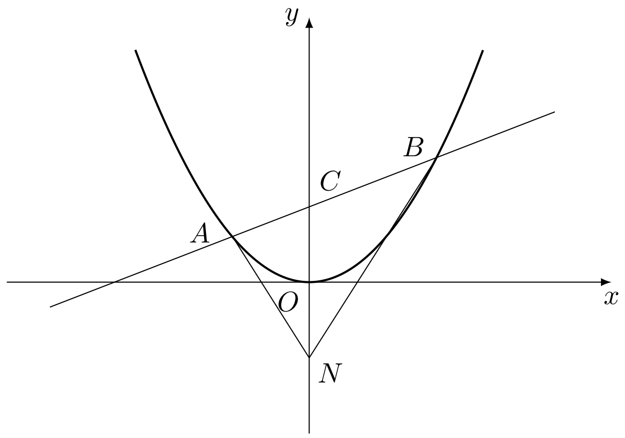
(2) 当角 θ 变化时, 求直线 BC 与平面 VAB 所成的角的取值范围.



19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过定点 $C(0,p)$ 作直线与抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 相交于 A, B 两点.

(1) 若点 N 是点 C 关于坐标原点 O 的对称点, 求 $\triangle ANB$ 面积的最小值;

(2) 是否存在垂直于 y 轴的直线 l, 使得 l 被以 AC 为直径的圆截得的弦长恒为定值? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.



20. 已知定义在正实数集上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2ax$, $g(x)=3a^2\ln x+b$, 其中 $a>0$. 设两曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 有公共点, 且在该点处的切线相同.

(1) 用 a 表示 b, 并求 b 的最大值;

(2) 求证: $f(x)\geqslant g(x)$ $(x>0)$.

21. 已知 m, n 为正整数.

(1) 用数学归纳法证明: 当 $x>-1$ 时, $(1+x)^m\geqslant 1+mx$;

(2) 对于 $n\geqslant 6$, 已知 $\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)^n<\dfrac{1}{2}$, 求证 $\left(1-\dfrac{m}{n+3}\right)^m<\dfrac{1}{2}$, $m=1$, 2, $\cdots$, n;

(3) 求满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 n.