2007 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

1. 不等式 $x^2 > x$ 的解集是 ( )

(A) $(-\infty, 0)$　(B) $(0, 1)$

(C) $(1, +\infty)$　(D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2. 若 O, E, F 是不共线的任意三点, 则以下各式中成立的是 ( )

(A) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$　(B) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$

(C) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$　(D) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$

3. 设 p: $b^2 - 4ac > 0$ $(a \neq 0)$, q: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ 有实根, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

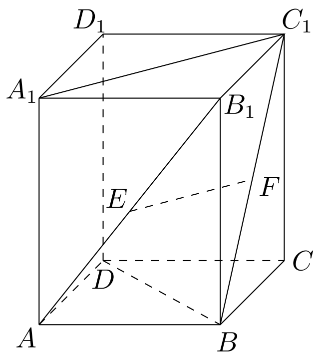
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 中, 若 $a_1 = 1$, $a_4 = \dfrac{1}{8}$, 则该数列的前 10 项和为 ( )

(A) $2 - \dfrac{1}{2^8}$　(B) $2 - \dfrac{1}{2^9}$　(C) $2 - \dfrac{1}{2^{10}}$　(D) $2 - \dfrac{1}{2^{11}}$

5. 在 $(1+x)^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 的二项展开式中, 若只有 x^5 的系数最大, 则 $n =$( )

(A) 8　(B) 9　(C) 10　(D) 11

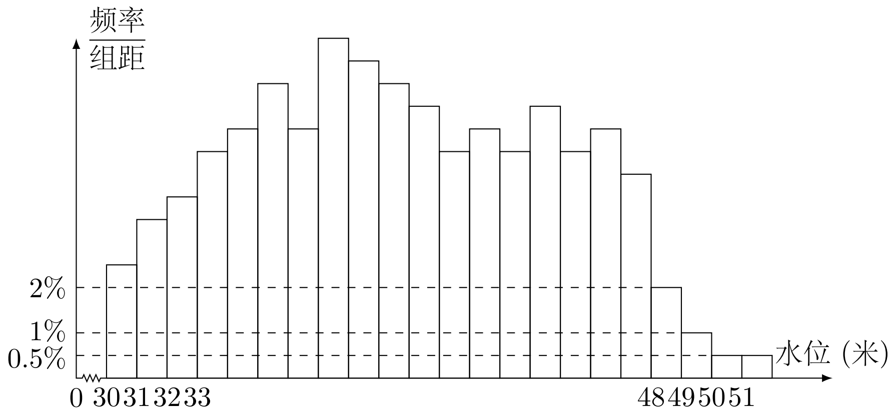
6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是 AB_1、BC_1 的中点, 则以下结论中不成立的是 ( )



(A) EF 与 BB_1 垂直　(B) EF 与 BD 垂直

(C) EF 与 CD 异面　(D) EF 与 A_1C_1 异面

7. 根据某水文观测点的历史统计数据, 得到某条河流水位的频率分布直方图 (如图), 从图中可以看出, 该水文观测点平均至少一百年才遇到一次的洪水的最低水位是 ( )



(A) 48 米　(B) 49 米　(C) 50 米　(D) 51 米

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & x \leqslant 1, \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1, \end{cases}$ 的图象和函数 $g(x) = \log_2 x$ 的图象的交点个数是 ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

9. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 1)$ 的左、右焦点, P 是其右准线上纵坐标为 $\sqrt{3}c$ (c 为半焦距) 的点, 且 $|F_1F_2| = |F_2P|$, 则椭圆的离心率是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 设集合 $M = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, S_1、S_2、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i = \{a_i,\ b_i\}$, $S_j = \{a_j,\ b_j\}$ $(i \neq j,\ i$、$j \in \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k\})$, 都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\ \dfrac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\ \dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x,\ y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者). 则 k 的最大值是 ( )

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1, 1)$ 且与直线 $x + y = 4$ 相切的圆的方程是______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $a = 1$, $c = \sqrt{3}$, $C = \dfrac{\pi}{3}$, 则 $A =$______.

13. 若 $a > 0$, $a^{\frac{2}{3}} = \dfrac{4}{9}$, 则 $\log_{\frac{2}{3}} a =$______.

14. 设集合 $A = \{(x, y) \mid y \geqslant |x - 2|,\ x \geqslant 0\}$, $B = \{(x, y) \mid y \leqslant -x + b\}$, $A \cap B \neq \varnothing$.

(1) b 的取值范围是______;

(2) 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x + 2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是______.

15. 棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积是______; 设 E、F 分别是该正方体的棱 AA_1、DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$. 求:

(1) 函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.

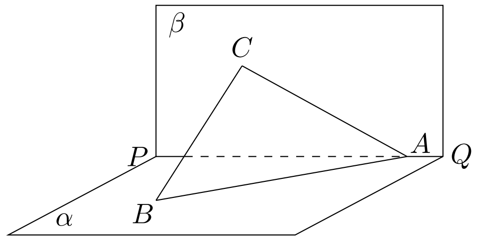
(1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;

(2) 任选 3 名下岗人员, 求这 3 人中至少有 2 人参加过培训的概率.

18. 如图, 已知直二面角 $\alpha-PQ-\beta$, $A\in PQ$, $B\in\alpha$, $C\in\beta$, $CA=CB$, $\angle BAP=45°$, 直线 CA 和平面 α 所成的角为 $30°$.

(1) 证明: $BC\perp PQ$;

(2) 求二面角 $B-AC-P$ 的大小.



19. 已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点为 F, 过点 F 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点, 点 C 的坐标是 $(1,0)$.

(1) 证明: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数;

(2) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CO}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程.

20. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和, $a_1=a$, 且 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$, $a_n\neq 0$, $n=2, 3, 4, \cdots$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+2}-a_n\}$ $(n\geqslant 2)$ 是常数数列;

(2) 试找出一个奇数 a, 使以 18 为首项, 7 为公比的等比数列 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 中的所有项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 并指出 b_n 是数列 $\{a_n\}$ 中的第几项.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx$ 在区间 $[-1,1)$, $(1,3]$ 内各有一个极值点.

(1) 求 a^2-4b 的最大值;

(2) 当 $a^2-4b=8$ 时, 设函数 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线为 l, 若 l 在点 A 处穿过 $y=f(x)$ 的图象 (即动点在点 A 附近沿曲线 $y=f(x)$ 运动, 经过点 A 时, 从 l 的一侧进入另一侧), 求函数 $f(x)$ 的表达式.