

2007 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 复数 $\left(\frac{2i}{1+i}\right)^2$ 等于 ()

- (A) 4i (B) -4i (C) 2i (D) -2i

2. 不等式 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$ 的解集是 ()

- (A) $(-\infty, -1) \cup (-1, 2]$ (B) $[-1, 2]$
(C) $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$ (D) $(-1, 2]$

3. 设 M, N 是两个集合, 则“ $M \cup N \neq \emptyset$ ”是“ $M \cap N \neq \emptyset$ ”的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4. 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是非零向量, 若函数 $f(x) = (\mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{x}\mathbf{b})$ 的图象是一条直线, 则必有 ()

- (A) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (B) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (C) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ (D) $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$

5. 设随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0, 1)$. 已知 $\Phi(-1.96) = 0.025$, 则 $P(|\xi| < 1.96) =$ ()

- (A) 0.025 (B) 0.050 (C) 0.950 (D) 0.975

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & x \leq 1, \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1, \end{cases}$ 的图象和函数 $g(x) = \log_2 x$ 的图象的交点个数是 ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

7. 下列四个命题中, 不正确的是 ()

- (A) 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
(B) 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点是 $x = 2$ 和 $x = -2$
(C) 若函数 $f(x), g(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$
(D) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

8. 棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, E, F 分别是棱 AA_1, DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 若在其右准线上存在 P , 使线段 PF_1 的中垂线过点 F_2 , 则椭圆离心率的取值范围是 ()

- (A) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (C) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (D) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

10. 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, S_1, S_2, \dots, S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i = \{a_i, b_i\}, S_j = \{a_j, b_j\} (i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\})$, 都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x, y 中的较小者). 则 k 的最大值是 ()

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1, 1)$ 且与直线 $x + y = 4$ 相切的圆的方程是_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 1, b = \sqrt{7}, c = \sqrt{3}$, 则 $B =$ _____.

13. 函数 $f(x) = 12x - x^3$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最小值是_____.

14. 设集合 $A = \left\{(x, y) \mid y \geq \frac{1}{2}|x - 2|\right\}, B = \{(x, y) \mid y \leq -|x| + b\}, A \cap B \neq \emptyset$.

- (1) b 的取值范围是_____;
(2) 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x + 2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是_____.

15. 将杨辉三角中的奇数换成 1, 偶数换成 0, 得到如图所示的 0-1 三角数表, 从上往下数, 第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行, 第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行, \dots , 第 n 次全行的数都为 1 的是第_____行; 第 61 行中 1 的个数是_____.

第 1 行		1	1			
第 2 行		1	0	1		
第 3 行	1	1	1	1		
第 4 行	1	0	0	0	1	
第 5 行	1	1	0	0	1	1

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right), g(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x$.

- (1) 设 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;
(2) 求函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 的单调递增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.

- (1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;
(2) 任选 3 名下岗人员, 记 ξ 为 3 人中参加过培训的人数, 求 ξ 的分布列和期望.

18. 如图 1, E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB, CD 的中点, G 是 EF 上的一点, 将 $\triangle GAB, \triangle GCD$ 分别沿 AB, CD 翻折成 $\triangle G_1AB, \triangle G_2CD$, 并连接 G_1G_2 , 使得平面 $G_1AB \perp$ 平面 $ABCD, G_1G_2 \parallel AD$, 且 $G_1G_2 < AD$, 连接 BG_2 , 如图 2.

- (1) 证明: 平面 $G_1AB \perp$ 平面 G_1ADG_2 ;
(2) 当 $AB = 12, BC = 25, EG = 8$ 时, 求直线 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角.

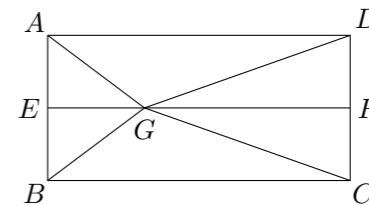


图 1

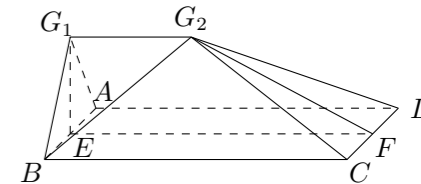
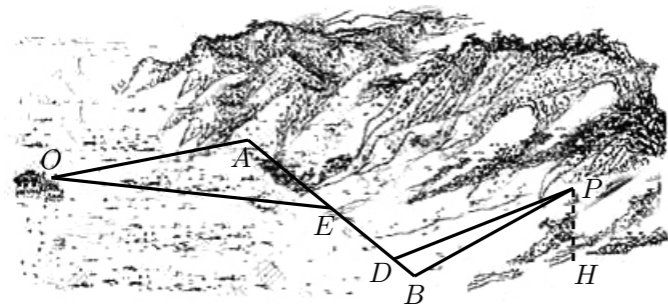


图 2

19. 如图, 某地为了开发旅游资源, 欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路, 点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), 且 $\sin \theta = \frac{2}{5}$, 点 P 到平面 α 的距离 $PH = 0.4$ (km). 沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用, 从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元/km, 原有公路改建费用为 $\frac{a}{2}$ 万元/km, 当山坡上公路长度为 l km ($1 \leq l \leq 2$) 时, 其造价为 $(l^2 + 1)a$ 万元, 已知 $OA \perp AB$, $PB \perp AB$, $AB = 1.5$ (km), $OA = \sqrt{3}$ (km).
- (1) 在 AB 上求一点 D , 使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小;
 - (2) 对于 (1) 中得到的点 D , 在 DA 上求一点 E , 使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小;
 - (3) 在 AB 上是否存在两个不同的点 D', E' , 使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于 (2) 中得到的最小总造价, 证明你的结论.



20. 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点.
- (1) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} = \overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1O}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程;
 - (2) 在 x 轴上是否存在定点 C , 使 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 为常数? 若存在, 求出点 C 的坐标; 若不存在, 请说明理由.
21. 已知 $A_n(a_n, b_n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是曲线 $y = e^x$ 上的点, $a_1 = a$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_n^2 = 3n^2a_n + S_{n-1}^2$, $a_n \neq 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$.
- (1) 证明: 数列 $\left\{ \frac{b_{n+2}}{b_n} \right\}$ ($n \geq 2$) 是常数数列;
 - (2) 确定 a 的取值集合 M , 使 $a \in M$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
 - (3) 证明: 当 $a \in M$ 时, 弦 A_nA_{n+1} ($n \in \mathbf{N}^*$) 的斜率随 n 单调递增.