2007 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$ 对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x-3|<2\}$, 则集合 $\complement_U A$ 等于 ( )

(A) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ (B) $\{2,\ 3,\ 4\}$ (C) $\{1,\ 5\}$ (D) $\{5\}$

3. 抛物线 $y=x^2$ 的准线方程是 ( )

(A) $4y+1=0$ (B) $4x+1=0$ (C) $2y+1=0$ (D) $2x+1=0$

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{5}$ (B) $-\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{3}{5}$

5. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $S_n=2$, $S_{3n}=14$, 则 S_{4n} 等于 ( )

(A) 80 (B) 30 (C) 26 (D) 16

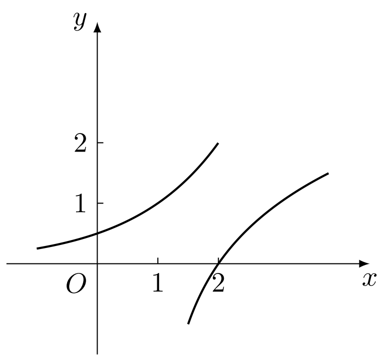
6. 一个正三棱锥的四个顶点都在半径为 1 的球面上, 其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上, 则该正三棱锥的体积是 ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

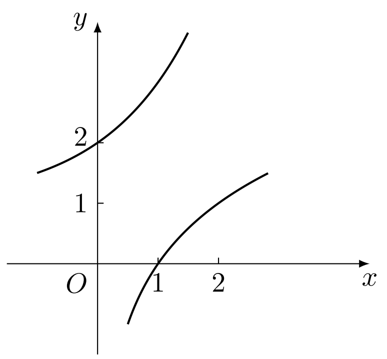
7. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$, 以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是 ( )

(A) $\sqrt{ab}$ (B) $\sqrt{a^2+b^2}$ (C) a (D) b

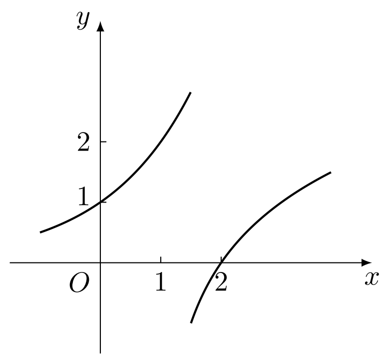
8. 若函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$, 则函数 $f(x-1)$ 与 $f^{-1}(x-1)$ 的图象可能是 ( )



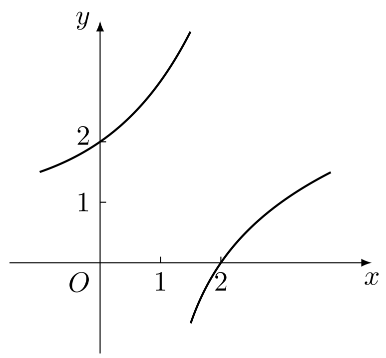
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 给出如下三个命题:

① 四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$;

② 设 $a, b\in\mathbf{R}$, 且 $ab\neq 0$, 若 $\dfrac{a}{b}<1$, 则 $\dfrac{b}{a}>1$;

③ 若 $f(x)=\log_2 x$, 则 $f(|x|)$ 是偶函数.

其中不正确的序号是 ( )

(A) ①②③ (B) ①② (C) ②③ (D) ①③

10. 已知平面 $\alpha\parallel$ 平面 β, 直线 $m\subset\alpha$, 直线 $n\subset\beta$, 点 $A\in m$, 点 $B\in n$, 记点 A、B 之间的距离为 a, 点 A 到直线 n 的距离为 b, 直线 m 和 n 的距离为 c, 则 ( )

(A) $b\leqslant c\leqslant a$ (B) $a\leqslant c\leqslant b$ (C) $c\leqslant a\leqslant b$ (D) $c\leqslant b\leqslant a$

11. $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x)+f(x)\leqslant 0$. 对任意正数 a, b, 若 $a<b$, 则必有 ( )

(A) $af(b)\leqslant bf(a)$ (B) $bf(a)\leqslant af(b)$ (C) $af(a)\leqslant f(b)$ (D) $bf(b)\leqslant f(a)$

12. 设集合 $S=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, 在 S 上定义运算 $\oplus$ 为: $A_i\oplus A_j=A_k$, 其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数, $i, j=0, 1, 2, 3$. 则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x\ (x\in S)$ 的个数为 ( )

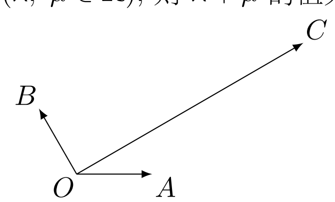
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

二、填空题

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)=$______.

14. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为______.

15. 如图, 平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120°, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30°, 且 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|=2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\ (\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$, 则 $\lambda+\mu$ 的值为______.



16. 安排 3 名支教教师去 6 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有______. 种. (用数字作答)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$, $\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x, 1)$, $x\in\mathbf{R}$, 且函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 2\right)$.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 值的集合.

18. 某项选拔共有三轮考核, 每轮设有一个问题, 能正确回答问题者进入下一轮考核, 否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\dfrac{4}{5}$、$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{2}{5}$, 且各轮问题能否正确回答互不影响.

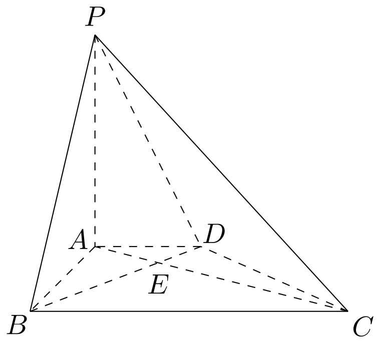
(1) 求该选手被淘汰的概率;

(2) 该选手在选拔中回答问题的个数记为 ξ, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望.

19. 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC=90°$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=4$, $AD=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=6$.

(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC;

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的大小.



20. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+ax+a}$, 其中 a 为实数.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调减区间.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

22. 已知各项全不为零的数列 $\{a_k\}$ 的前 k 项和为 S_k, 且 $S_k=\dfrac{1}{2}a_ka_{k+1}\ (k\in \mathbf{N}^*)$, 其中 $a_1=1$.

(1) 求数列 $\{a_k\}$ 的通项公式;

(2) 对任意给定的正整数 $n\ (n\geqslant 2)$, 数列 $\{b_k\}$ 满足 $\dfrac{b_{k+1}}{b_k}=\dfrac{k-n}{a_{k+1}}\ (k=1, 2, \cdots, n-1)$, $b_1=1$. 求 $b_1+b_2+\cdots+b_n$.