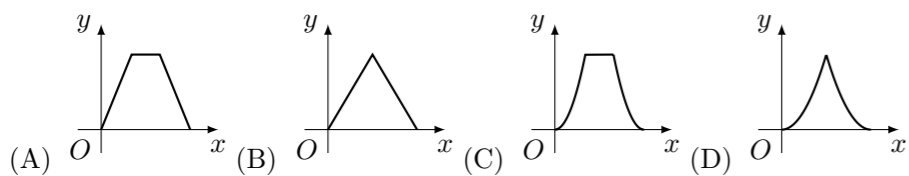
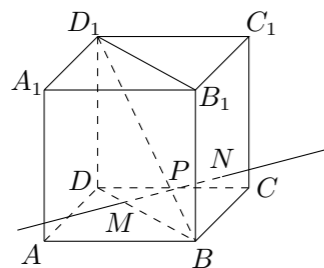


2008 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

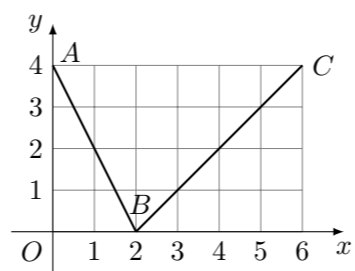
一、选择题

- 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 那么集合 $A \cap (\complement_U B)$ 等于 ()
 (A) $\{x | -2 \leq x < 4\}$ (B) $\{x | x \leq 3 \text{ 或 } x \geq 4\}$
 (C) $\{x | -2 \leq x < -1\}$ (D) $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$
- 若 $a = 2^{0.5}$, $b = \log_{\pi} 3$, $c = \log_2 \sin \frac{2\pi}{5}$, 则 ()
 (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > a > b$ (D) $b > c > a$
- “函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 存在反函数”是“函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 若点 P 到直线 $x = -1$ 的距离比它到点 $(2, 0)$ 的距离小 1, 则点 P 的轨迹为 ()
 (A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线
- 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y \geq 0, \\ x \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3^{x+2y}$ 的最小值是 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{3}$ (D) 9
- 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $p, q \in \mathbf{N}^*$ 满足 $a_{p+q} = a_p + a_q$, 且 $a_2 = -6$, 那么 a_{10} 等于 ()
 (A) -165 (B) -33 (C) -30 (D) -21
- 过直线 $y = x$ 上的一点作圆 $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 的两条切线 l_1, l_2 , 当直线 l_1, l_2 关于 $y = x$ 对称时, 它们之间的夹角为 ()
 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°
- 如图, 动点 P 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上. 过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线, 与正方体表面相交于 MN . 设 $BP = x$, $MN = y$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象大致是 ()



二、填空题

- 已知 $(a - i)^2 = 2i$, 其中 i 是虚数单位, 那么实数 $a =$ _____.
- 已知向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 120° , 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 4$, 那么 $\mathbf{b} \cdot (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ 的值为_____.
- 若 $(x^2 + \frac{1}{x^3})^n$ 展开式的各项系数之和为 32, 则 $n =$ _____, 其展开式中的常数项为_____. (用数字作答)
- 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC , 其中 A, B, C 的坐标分别为 $(0, 4), (2, 0), (6, 4)$, 则 $f(f(0)) =$ _____; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$ _____. (用数字作答)



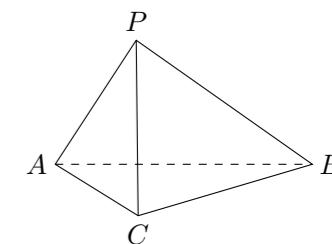
- 已知函数 $f(x) = x^2 - \cos x$, 对于 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的任意 x_1, x_2 , 有如下条件:
 ① $x_1 > x_2$; ② $x_1^2 > x_2^2$; ③ $|x_1| > |x_2|$. 其中能使 $f(x_1) > f(x_2)$ 恒成立的条件序号是_____.
- 某校数学课外小组在坐标纸上, 为学校的一块空地设计植树方案如下: 第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k, y_k)$ 处, 其中 $x_1 = 1, y_1 = 1$, 当 $k \geq 2$ 时,

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + 1 - 5 \left[T\left(\frac{k-1}{5}\right) - T\left(\frac{k-2}{5}\right) \right], \\ y_k = y_{k-1} + T\left(\frac{k-1}{5}\right) - T\left(\frac{k-2}{5}\right). \end{cases}$$
 $T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分, 例如 $T(2.6) = 2, T(0.2) = 0$. 按此方案, 第 6 棵树种植点的坐标应为_____; 第 2008 棵树种植点的坐标应为_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .
 (1) 求 ω 的值;
 (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的取值范围.

- 如图, 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $AC = BC = 2, \angle ACB = 90^\circ, AP = BP = AB, PC \perp AC$.
 (1) 求证: $PC \perp AB$;
 (2) 求二面角 $B - AP - C$ 的大小;
 (3) 求点 C 到平面 APB 的距离.



- 甲、乙等五名奥运志愿者被随机地分到 A, B, C, D 四个不同的岗位服务, 每个岗位至少有一名志愿者.
 (1) 求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率;
 (2) 求甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率;
 (3) 设随机变量 ξ 为这五名志愿者中参加 A 岗位服务的人数, 求 ξ 的分布列.

18. 已知函数 $f(x) = \frac{2x-b}{(x-1)^2}$, 求导函数 $f'(x)$, 并确定 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在椭圆 $x^2 + 3y^2 = 4$ 上, 对角线 BD 所在直线的斜率为 1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0,1)$ 时, 求直线 AC 的方程;

(2) 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时, 求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

20. 对于每项均是正整数的数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 定义变换 T_1 , T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A): n, a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$. 对于每项均是非负整数的数列 $B: b_1, b_2, \dots, b_m$, 定义变换 T_2 , T_2 将数列 B 各项从大到小排列, 然后去掉所有为零的项, 得到数列 $T_2(B)$; 又定义 $S(B) = 2(b_1 + 2b_2 + \dots + mb_m) + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2$. 设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列, 令 $A_{k+1} = T_2(T_1(A_k))$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

(1) 如果数列 A_0 为 5,3,2, 写出数列 A_1, A_2 ;

(2) 对于每项均是正整数的有穷数列 A , 证明 $S(T_1(A)) = S(A)$;

(3) 证明: 对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0 , 存在正整数 K , 当 $k \geq K$ 时, $S(A_{k+1}) = S(A_k)$.