2008年普通高等学校招生全国统一考试(四川延考卷)

数 学（理科）

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）集合 $A=\{-1,0,1\}$，A 的子集中，含有元素 0 的子集共有

（A）2个　　（B）4个　　（C）6个　　（D）8个

（2）已知复数 $z=\dfrac{(3+i)(3-i)}{2-i}$，则 $|z|=$

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$2\sqrt{5}$

（3）$(1+\dfrac{1}{x})(1+x)^4$ 的展开式中含 x^2 的项的系数为

（A）4　　（B）6　　（C）10　　（D）12

（4）已知 $n\in N^*$，则不等式 $\left|\dfrac{2n}{n+1}-2\right|<0.01$ 的解集为

（A）$\{n|n\geqslant 199,\ n\in N^*\}$　　（B）$\{n|n\geqslant 200,\ n\in N^*\}$

（C）$\{n|n\geqslant 201,\ n\in N^*\}$　　（D）$\{n|n\geqslant 202,\ n\in N^*\}$

（5）已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}=$

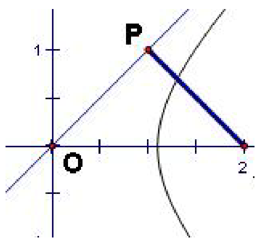
（A）2　（B）-2　（C）3　（D）-3

（6）一个正三棱锥的底面边长等于一个球的半径，该正三棱锥的高等于这个球的直径，则球的体积与正三棱锥体积的比值为

（A）$\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　（D）$8\sqrt{3}\pi$

（7）若点 $P(2,0)$ 到双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则双曲线的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$2\sqrt{2}$　　（D）$2\sqrt{3}$



（8）在一次读书活动中，一同学从4本不同的科技书和2本不同的文艺书中任选3本，则所选的书中既有科技书又有文艺书的概率为

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

（9）过点 $(1,1)$ 的直线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 相交于 A,B 两点，则 $|AB|$ 的最小值为

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）4　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）5

（10）已知两个单位向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$135°$，则$|\vec{a}+\lambda\vec{b}|>1$的充要条件是

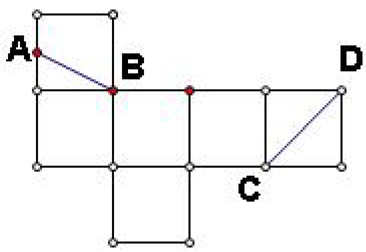
（A）$\lambda\in(0,\sqrt{2})$　　（B）$\lambda\in(-\sqrt{2},0)$

（C）$\lambda\in(-\infty,0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$　　（D）$\lambda\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

（11）设函数$y=f(x)\ (x\in R)$的图象关于直线$x=0$及直线$x=1$对称，且$x\in[0,1]$时，$f(x)=x^2$，则$f(-\dfrac{3}{2})=$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{9}{4}$

（12）一个正方体的展开图如图所示，B,C,D为原正方体的顶点，A为原正方体一条棱的中点。在原来的正方体中，CD与AB所成角的余弦值为



（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

二．填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分。把答案填在题中模式横线上。

（13）函数$y=e^{x+1}-1\ \ (x\in R)$的反函数为________。

（14）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_5=a_5$。若$a_4\neq0$，则$\dfrac{a_7}{a_4}=$_____。

（15）已知函数$f(x)=\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})\ \ (\omega>0)$在$(0,\dfrac{4\pi}{3})$单调增加，在$(\dfrac{4\pi}{3},2\pi)$单调减少，则$\omega=$______。

（16）已知$\angle AOB=90°$，C为空间中一点，且$\angle AOC=\angle BOC=60°$，则直线$OC$与平面$AOB$所成角的正弦值为_________。

三．解答题：本大题共6个小题，共74分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分12分）在△ABC中，内角A,B,C对边的边长分别是a,b,c，已知$a^2+c^2=2b^2$。

（Ⅰ）若$B=\dfrac{\pi}{4}$，且A为钝角，求内角A与C的大小；

（Ⅱ）若$b=2$，求△ABC面积的最大值。

（18）（本小题满分12分）一条生产线上生产的产品按质量情况分为三类：A类、B类、C类。检验员定时从该生产线上任取2件产品进行一次抽检，若发现其中含有C类产品或2件都是B类产品，就需要调整设备，否则不需要调整。已知该生产线上生产的每件产品为A类品，B类品和C类品的概率分别为0.9，0.05和0.05，且各件产品的质量情况互不影响。

（Ⅰ）求在一次抽检后，设备不需要调整的概率；

（Ⅱ）若检验员一天抽检 3 次，以 ξ 表示一天中需要调整设备的次数，求 ξ 的分布列和数学期望。

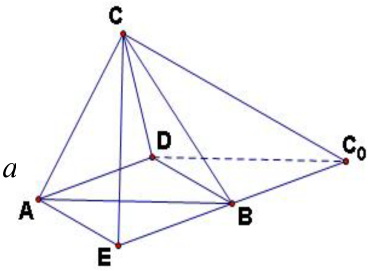
（19）（本小题满分 12 分）

如图，一张平行四边形的硬纸片 ABC_0D 中，$AD=BD=1$，$AB=\sqrt{2}$。沿它的对角线 BD 把

$\triangle BDC_0$ 折起，使点 C_0 到达平面 ABC_0D 外点 C 的位置。

（Ⅰ）证明：平面 $ABC_0D\perp$ 平面 CBC_0；

（Ⅱ）如果△ ABC 为等腰三角形，求二面角 $A-BD-C$ 的大小。



（20）（本小题满分 12 分）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$2a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})^2 a$

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）令 $b_n=a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

（Ⅲ）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

（21）（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C_1 的中心和抛物线 C_2 的顶点都在坐标原点 O，C_1 和 C_2 有公共焦点 F，点 F 在 x 轴正半轴上，且 C_1 的长轴长、短轴长及点 F 到 C_1 右准线的距离成等比数列。

（Ⅰ）当 C_2 的准线与 C_1 右准线间的距离为 15 时，求 C_1 及 C_2 的方程；

（Ⅱ）设过点 F 且斜率为 1 的直线 l 交 C_1 于 P，Q 两点，交 C_2 于 M，N 两点。当 $|PQ|=\frac{36}{7}$ 时，求 $|MN|$ 的值。

（22）（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$。

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）若对一切 $x\in R$，$-3\le af(x)+b\le 3$，求 $a-b$ 的最大值。

参考答案

一．选择题：

（1）B

解：A 的子集共 $2^3=8$ 个，含有元素 0 的和不含元素 0 的子集各占一半，有 4 个．选 B

（2）D

解：$z=\frac{(3+i)(3-i)}{2-i}=\frac{10(2+i)}{(2-i)(2+i)}=2(2+i)=4+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

（3）C

解：$(1+\frac{1}{x})(1+x)^4=(1+\frac{1}{x})(1+C_4^1x+C_4^2x^2+C_4^3x^3+\cdots)$ 展开式中含 x^2 项的系数为 $C_4^2+C_4^3=10$

（4）B

解：$\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2}{n+1}\right|<0.01=\frac{2}{200} \Rightarrow n\geq 200, n\in N^*$

（5）C

解：$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$，选 C

（6）A

解： 设球的半径为 r $\Rightarrow V_1=\frac{4}{3}\pi r^3$；正三棱锥的底面面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$， $h=2r$，

$\Rightarrow V_2=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\times 2r=\frac{\sqrt{3}}{6}r^3$。所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$，选 A

（7）A

解：设过一象限的渐近线倾斜角为 α $\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \alpha=45^\circ \Rightarrow k=1$

所以 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm x$ $\Rightarrow a=b$，因此 $c=\sqrt{2}a, e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，选 A。

（8）D

解：因文艺书只有 2 本，所以选 3 本必有科技书。问题等价于选 3 本书有文艺书的概率：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_4^3}{C_6^3}=1-\frac{4}{20}=\frac{4}{5}$$

（9）B

解： 弦心距最大为 $\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$，$|AB|$ 的最小值为 $2\sqrt{9-5}=4$

（10）C

解：

$$|\vec{a}+\lambda\vec{b}|>1 \Leftrightarrow \vec{a}^2+2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda^2\vec{b}^2=1+\lambda^2+2\lambda\times1\times1\times\cos135^\circ=\lambda^2-\sqrt{2}\lambda+1>1$$

$\Leftrightarrow \lambda^2-\sqrt{2}\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<0或\lambda>\sqrt{2}$，选 C

（11）B

解：$f(-\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2})=f(1+\frac{1}{2})=f(1-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

（12）D

解：还原正方体如右图所示设 $AD=1$,则 $AB=\sqrt{5}$, $AF=1$,

$BE=EF=2\sqrt{2}$, $AE=3$, CD 与 AB 所成角等于 BE 与 AB 所成角,

所以余弦值为 $\cos\angle ABE=\frac{5+8-9}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,选 D

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中模式横线上。

（13）

解：$y=e^{x+1}-1\Rightarrow e^{x+1}=y+1\Rightarrow x+1=\ln(y+1)$，所以反函数 $y=\ln(x+1)-1(x>-1)$,

（14）

解：$S_5=a_5\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=0\Rightarrow a_1+a_4=a_2+a_3=0$，取特殊值

令 $a_2=1,a_3=-1,\Rightarrow a_4=-3$ $a_7=2a_4-a_1=-9$，所以 $\frac{a_7}{a_4}=3$

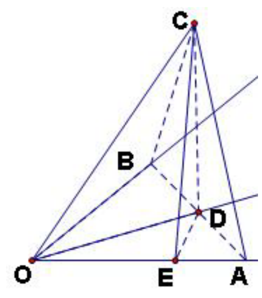
（15）

解：由题意 $f(\frac{4}{3}\pi)=\sin(\frac{4}{3}\pi\omega-\frac{\pi}{6})=1\Rightarrow\frac{4}{3}\pi\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{3}{2}k+\frac{1}{2},k\in Z$

又 $\omega>0$，令 $k=0$ 得 $\omega=\frac{1}{2}$。（如 $k>0$，则 $\omega\geq2$， $T\leq\pi$ 与已知矛盾）

（16）

解：由对称性点 C 在平面 AOB 内的射影 D 必在 $\angle AOB$ 的平分线上作 $DE\perp OA$ 于 E，连结 CE 则由三垂线定理 $CE\perp OE$,



设 $DE=1\Rightarrow OE=1,OD=\sqrt{2}$，又 $\angle COE=60^\circ,CE\perp OE\Rightarrow OE=2$, 所以 $CD=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{2}$，因此直线 OC 与平面 AOB 所成角的正弦值 $\sin\angle COD=\frac{\sqrt{2}}{2}$

三．解答题：

（17）

解：（Ⅰ）由题设及正弦定理，有 $\sin^2A+\sin^2C=\sin^2B=1$。

故 $\sin^2C=\cos^2A$。因 A 为钝角，所以 $\sin C=-\cos A$。

由 $\cos A=\cos(\pi-\frac{\pi}{4}-C)$，可得 $\sin C=\sin(\frac{\pi}{4}-C)$，得 $C=\frac{\pi}{8}$， $A=\frac{5\pi}{8}$ 。

（II）由余弦定理及条件 $b^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2)$，有 $\cos B=\frac{a^2+c^2}{4ac}$，故 $\cos B\geqslant\frac{1}{2}$。

由于△ ABC 面积 $=\frac{1}{2}ac\sin B$，

又 $ac\leqslant\frac{1}{2}(a^2+c^2)=4$， $\sin B\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，

当 $a=c$ 时，两个不等式中等号同时成立，

所以△ ABC 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 。

（18）

解：（Ⅰ）设 A_i 表示事件“在一次抽检中抽到的第 i 件产品为 A 类品”， $i=1,2.$

B_i 表示事件“在一次抽检中抽到的第 i 件产品为 B 类品”， $i=1,2.$

C 表示事件“一次抽检后，设备不需要调整”。

则 $C=A_1\cdot A_2+A_1\cdot B_2+B_1\cdot A_2$ 。

由已知 $P(A_i)=0.9$， $P(B_i)=0.05$ $i=1,2.$

所以，所求的概率为 $P(C)=P(A_1\cdot A_2)+P(A_1\cdot B_2)+P(B_1\cdot A_2)$

$$=0.9^2+2\times0.9\times0.05=0.9$$ 。

（II）由（Ⅰ）知一次抽检后，设备需要调整的概率为

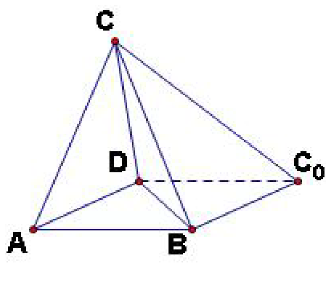
$p=P(\overline{C})=1-0.9=0.1$，依题意知 $\xi\sim B(3,0.1)$， ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
p	0．729	0．243	0．027	0．001

$E\xi=np=3\times0.1=0.3$ 。

（19）

解：（Ⅰ）证明：因为 $AD=BC_0=BD=1$， $AB=C_0D=\sqrt{2}$，



所以 $\angle DBC_0=90^\circ$， $\angle ADB=90^\circ$ 。

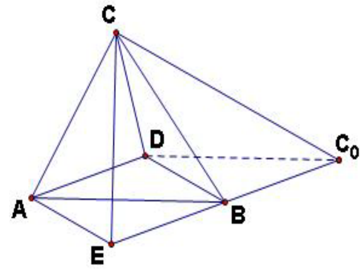
因为折叠过程中， $\angle DBC=\angle DBC_0=90^\circ$，

所以 $DB\perp BC$，又 $DB\perp BC_0$，故 $DB\perp$ 平面 CBC_0。

又 $DB\subset$ 平面 ABC_0D，所以平面 $ABC_0D\perp$ 平面 CBC_0。

（II）解法一：如图，延长 C_0B 到 E，使 $BE=C_0B$，连结 AE，CE。

因为 $AD \mathrel{\underline{\parallel}} BE$，$BE=1$，$DB=1$，$\angle DBE=90^\circ$，所以 $AEBD$ 为正方形，$AE=1$。



由于 AE，DB 都与平面 CBC_0 垂直，所以 $AE\perp CE$，可知 $AC>1$。

因此只有 $AC=AB=\sqrt{2}$ 时，△ ABC 为等腰三角形。

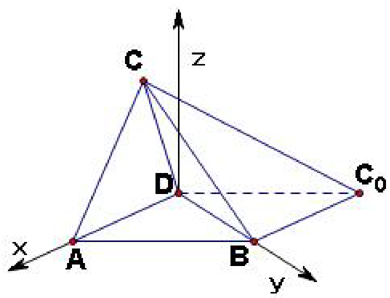
在 Rt △ AEC 中，$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=1$，又 $BC=1$，

所以△ CEB 为等边三角形，$\angle CBE=60^\circ$。

由（I）可知，，所以 $\angle CBE$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角，即二面角 $A-BD-C$ 的大小为 60°。

解法二：以 D 为坐标原点，射线 DA，DB 分别为 x 轴正半轴和 y 轴正半轴，建立如图的空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$D(0,0,0)$。

由（I）可设点 C 的坐标为 $(x,1,z)$，其中 $z>0$，则有 $x^2+z^2=1$。　①



因为△ ABC 为等腰三角形，所以 $AC=1$ 或 $AC=\sqrt{2}$。

若 $AC=1$，则有 $(x-1)^2+1+z^2=1$。

则此得 $x=1$，$z=0$，不合题意。

若 $AC=\sqrt{2}$，则有 $(x-1)^2+1+z^2=2$。　②

联立①和②得 $x=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。故点 C 的坐标为 $(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$。

由于 $DA\perp BD$，$BC\perp BD$，所以 $\overrightarrow{DA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 夹角的大小等于二面角 $A-BD-C$ 的大小。

又 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BC}=(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\cos<\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}>=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{1}{2}.$

所以 $<\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}>=60^\circ$　即二面角 $A-BD-C$ 的大小为 60°。

（20）

解：（I）由条件得 $\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_n}{n^2}$，又 $n=1$ 时，$\dfrac{a_n}{n^2}=1$，

故数列 $\{\frac{a_n}{n^2}\}$ 构成首项为1，公式为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列．从而 $\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2^{n-1}}$ ，即 $a_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$ ．

（II）由 $b_n=\frac{(n+1)^2}{2^n}-\frac{n^2}{2^n}=\frac{2n+1}{2^n}$ 得 $S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n}$ ，

$\Rightarrow\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$ ，

两式相减得 ： $\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{2n+1}{2^{n+1}}$ ， 所以 $S_n=5-\frac{2n+5}{2^n}$ ．

（III）由 $S_n=(a_2+a_3+\cdots+a_{n+1})-\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 得

$T_n-a_1+a_{n+1}-\frac{1}{2}T_n=S_n$

所以 $T_n=2S_n+2a_1-2a_{n+1}=12-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$ ．

（21）（

解:（Ⅰ）设 C_1： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，其半焦距为 c $(c>0)$．则 C_2： $y^2=4cx$ ．

由条件知 $(2b)^2=2a(\frac{a^2}{c}-c)$ ，得 $a=2c$ ．

C_1 的右准线方程为 $x=\frac{a^2}{c}$ ，即 $x=4c$ ．

C_2 的准线方程为 $x=-c$ ．

由条件知 $5c=15$， 所以 $c=3$，故 $a=6$， $b=3\sqrt{3}$ ．

从而 C_1： $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ ， C_2： $y^2=12x$ ．

（Ⅱ）由题设知 l： $y=x-c$ ，设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$， $P(x_3,y_3)$， $Q(x_4,y_4)$ ．

由（Ⅰ）知 $C_1:\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$ ，即 $3x^2+4y^2=12c^2$

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12c^2\\ y=x-c\end{cases}$ ， 知 x_3,x_4 满足 $7x^2-8cx-8c^2=0$ ，

从而 $|PQ|=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}=\sqrt{2}|x_3-x_4|=\frac{24}{7}c$

由条件 $|PQ|=\frac{36}{7}$,得 $c=\frac{3}{2}$， 故 C_2： $y^2=6x$.

由 $\begin{cases} y^2=6x \\ y=x-\frac{3}{2} \end{cases}$ 得 $x^2-9x+\frac{9}{4}=0$ ，所以 $x_1+x_2=9$

于是 $|MN|=|MF|+|FN|=x_1+x_2+2c=12$

（22）

解：（Ⅰ） $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$ ，

当 $x\in(-2,1)$ 时， $f'(x)>0$ ；当 $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ；

故 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 单调增加，在 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ 单调减少。

$f(x)$ 的极小值 $f(-2)=-\frac{1}{2}$ ，极大值 $f(1)=1$

（Ⅱ）由 $(f(x)+\frac{1}{2})(f(1)-1)=\frac{-(x+2)^2(x-1)^2}{2(x^2+2)^2}$ 知

$(f(x)+\frac{1}{2})(f(1)-1)\le 0$ 即 $-\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$

由此及（Ⅰ）知 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ ，最大值为 1

因此对一切 $x\in R$ ， $-3\le af(x)+b\le 3$ 的充要条件是，

$$\begin{cases} -3\le -\frac{1}{2}a+b\le 3 \\ -3\le a+b\le 3 \end{cases}$$

即 a ， b 满足约束条件

$$\begin{cases} a+b\ge -3 \\ a+b\le 3 \\ -\frac{1}{2}a+b\ge -3 \\ -\frac{1}{2}a+b\le 3 \end{cases}$$

，由线性规划得， $a-b$ 的最大值为 5.