2008 普通高等学校招生考试 (大纲卷 II 理)

一、选择题

1. 设集合 $M = \{m \in \mathbf{Z} \mid -3 < m < 2\}$, $N = \{n \in \mathbf{Z} \mid -1 \leqslant n \leqslant 3\}$, 则 $M \cap N =$ ( )

(A) $\{0,\ 1\}$　(B) $\{-1,\ 0,\ 1\}$　(C) $\{0,\ 1,\ 2\}$　(D) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

2. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $b \neq 0$, 若复数 $(a+b\mathrm{i})^3$ 是实数, 则 ( )

(A) $b^2 = 3a^2$　(B) $a^2 = 3b^2$　(C) $b^2 = 9a^2$　(D) $a^2 = 9b^2$

3. 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x} - x$ 的图象关于 ( )

(A) y 轴对称　(B) 直线 $y = -x$ 对称
(C) 坐标原点对称　(D) 直线 $y = x$ 对称

4. 若 $x \in (\mathrm{e}^{-1}, 1)$, $a = \ln x$, $b = 2\ln x$, $c = \ln^3 x$, 则 ( )

(A) $a < b < c$　(B) $c < a < b$　(C) $b < a < c$　(D) $b < c < a$

5. 设变量 x, y 满足约束条件: $\begin{cases} y \geqslant x, \\ x + 2y \leqslant 2, \\ x \geqslant -2, \end{cases}$ 则 $z = x - 3y$ 的最小值 ( )

(A) -2　(B) -4　(C) -6　(D) -8

6. 从 20 名男同学,10 名女同学中任选 3 名参加体能测试, 则选到的 3 名同学中既有男同学又有女同学的概率为 ( )

(A) $\dfrac{9}{29}$　(B) $\dfrac{10}{29}$　(C) $\dfrac{19}{29}$　(D) $\dfrac{20}{29}$

7. $(1-\sqrt{x})^6(1+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 ( )

(A) -4　(B) -3　(C) 3　(D) 4

8. 若动直线 $x = a$ 与函数 $f(x) = \sin x$ 和 $g(x) = \cos x$ 的图象分别交于 M、N 两点, 则 $|MN|$ 的最大值为 ( )

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

9. 设 $a > 1$, 则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{(a+1)^2} = 1$ 的离心率 e 的取值范围是 ( )

(A) $(\sqrt{2}, 2)$　(B) $(\sqrt{2}, \sqrt{5})$　(C) $(2, 5)$　(D) $(2, \sqrt{5})$

10. 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等, E 是 SB 的中点, 则 AE, SD 所成的角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

11. 等腰三角形两腰所在直线的方程分别为 $x + y - 2 = 0$ 与 $x - 7y - 4 = 0$, 原点在等腰三角形的底边上, 则底边所在直线的斜率为 ( )

(A) 3　(B) 2　(C) $-\dfrac{1}{3}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

12. 已知球的半径为 2, 相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆. 若两圆的公共弦长为 2, 则两圆的圆心距等于 ( )

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a} = (1,2)$, $\boldsymbol{b} = (2,3)$. 若向量 $\lambda\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c} = (-4,-7)$ 共线, 则 $\lambda =$______.

14. 设曲线 $y = \mathrm{e}^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x + 2y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$______.

15. 已知 F 是抛物线 C: $y^2 = 4x$ 的焦点, 过 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A、B 两点. 设 $|FA| > |FB|$, 则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于______.

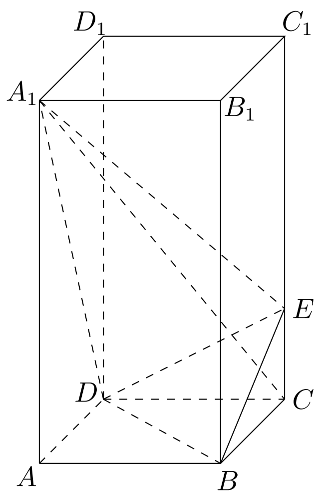
16. 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个, 如两组对边分别平行, 类似地, 写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件:
充要条件① ______________________________;
充要条件② ______________________________.
(写出你认为正确的两个充要条件)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = -\dfrac{5}{13}$, $\cos C = \dfrac{4}{5}$.
(1) 求 $\sin A$ 的值;
(2) 设 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{33}{2}$, 求 BC 的长.

18. 购买某种保险, 每个投保人每年度向保险公司交纳保费 a 元, 若投保人在购买保险的一年度内出险, 则可以获得 10000 元的赔偿金. 假定在一年度内有 10000 人购买了这种保险, 且各投保人是否出险相互独立. 已知保险公司在一年度内至少支付赔偿金 10000 元的概率为 $1 - 0.999^{10^4}$.
(1) 求一投保人在一年度内出险的概率 p;
(2) 设保险公司开办该项险种业务除赔偿金外的成本为 50000 元, 为保证盈利的期望不小于 0, 求每位投保人应交纳的最低保费. (单位: 元)

19. 如图, 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB = 4$, 点 E 在 CC_1 上且 $C_1E = 3EC$.
(1) 证明: $A_1C \perp$ 平面 BED;
(2) 求二面角 $A_1 - DE - B$ 的大小.



20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_1 = a$, $a_{n+1} = S_n + 3^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_n = S_n - 3^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_{n+1} \geqslant a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求 a 的取值范围.

21. 设椭圆中心在坐标原点, $A(2,0)$, $B(0,1)$ 是它的两个顶点, 直线 $y = kx$ $(k > 0)$ 与 AB 相交于点 D, 与椭圆相交于 E、F 两点.

(1) 若 $\overrightarrow{ED} = 6\overrightarrow{DF}$, 求 k 的值;

(2) 求四边形 $AEBF$ 面积的最大值.

22. 设函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 如果对任何 $x \geqslant 0$, 都有 $f(x) \leqslant ax$, 求 a 的取值范围.