2008 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid 0<x\leqslant 8\}$, $S=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $T=\{3,\ 5,\ 7\}$, 则 $S\cap(\complement_U T)=$ ( )
(A) $\{1,\ 2,\ 4\}$ (B) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$
(C) $\{1,\ 2\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 1,\\ x+2y\geqslant 1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=5x+y$ 的最大值为 ( )
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 函数 $y=1+\sqrt{x}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的反函数是 ( )
(A) $y=(x-1)^2$ $(1\leqslant x\leqslant 3)$ (B) $y=(x-1)^2$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$
(C) $y=x^2-1$ $(1\leqslant x\leqslant 3)$ (D) $y=x^2-1$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$

4. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=25$, 且 $a_2=3$, 则 $a_7=$ ( )
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

5. 设 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 则 $a\perp b$ 的一个充分条件是 ( )
(A) $a\perp\alpha$, $b\parallel\beta$, $\alpha\perp\beta$ (B) $a\perp\alpha$, $b\perp\beta$, $\alpha\parallel\beta$
(C) $a\subset\alpha$, $b\perp\beta$, $\alpha\parallel\beta$ (D) $a\subset\alpha$, $b\parallel\beta$, $\alpha\perp\beta$

6. 把函数 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到的图象所表示的函数是 ( )
(A) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $x\in\mathbf{R}$ (B) $y=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$
(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $x\in\mathbf{R}$ (D) $y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $x\in\mathbf{R}$

7. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ $(m>0,\ n>0)$ 的右焦点与抛物线 $y^2=8x$ 的焦点相同, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 则此椭圆的方程为 ( )
(A) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{64}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0,\\ -x+2, & x>0,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)\geqslant x^2$ 的解集为 ( )
(A) $[-1,1]$ (B) $[-2,2]$ (C) $[-2,1]$ (D) $[-1,2]$

9. 设 $a=\sin\dfrac{5\pi}{7}$, $b=\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $c=\tan\dfrac{2\pi}{7}$, 则 ( )
(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<c<a$ (D) $b<a<c$

10. 设 $a>1$, 若对于任意的 $x\in[a,2a]$, 都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=3$, 这时 a 的取值的集合为 ( )
(A) $\{a\mid 1<a\leqslant 2\}$ (B) $\{a\mid a\geqslant 2\}$ (C) $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 3\}$ (D) $\{2,\ 3\}$

二、填空题

11. 一个单位共有职工 200 人, 其中不超过 45 岁的有 120 人, 超过 45 岁的有 80 人. 为了调查职工的健康状况, 用分层抽样的方法从全体职工中抽取一个容量为 25 的样本, 应抽取超过 45 岁的职工______人.

12. $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^3 的系数为______. (用数字作答)

13. 若一个球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则它的表面积为______.

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{c}|=$______.

15. 已知圆 C 的圆心与点 $P(-2,1)$ 关于直线 $y=x+1$ 对称. 直线 $3x+4y-11=0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=6$, 则圆 C 的方程为______.

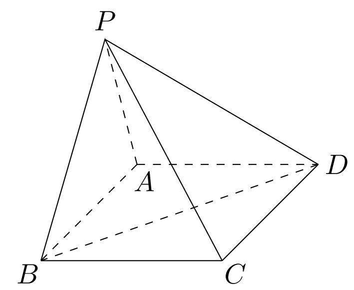
16. 有 4 张分别标有数字 1, 2, 3, 4 的红色卡片和 4 张分别标有数字 1,2,3,4 的蓝色卡片, 从这 8 张卡片中取出 4 张卡片排成一行. 如果取出的 4 张卡片所标的数字之和等于 10, 则不同的排法共有______种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+2\sin\omega x\cos\omega x+1$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0)$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.
(1) 求 ω 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值, 并且求使 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

18. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 p, 且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\dfrac{1}{16}$.
(1) 求乙投球的命中率 p;
(2) 求甲投球 2 次, 至少命中 1 次的概率;
(3) 若甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 2 次的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. 已知 $AB=3$, $AD=2$, $PA=2$, $PD=2\sqrt{2}$, $\angle PAB=60^\circ$.
(1) 证明 $AD\perp$ 平面 PAB;
(2) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;
(3) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$ ($n \geqslant 2$, $q \neq 0$).
(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 若 a_3 是 a_6 与 a_9 的等差中项, 求 q 的值, 并证明: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项.

21. 设函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 a, $b \in \mathbf{R}$.
(1) 当 $a = -\dfrac{10}{3}$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若函数 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处有极值, 求 a 的取值范围;
(3) 若对于任意的 $a \in [-2, 2]$, 不等式 $f(x) \leqslant 1$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

22. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3, 0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x - 2y = 0$.
(1) 求双曲线 C 的方程;
(2) 若以 k ($k \neq 0$) 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N, 线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\dfrac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.