

2008 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

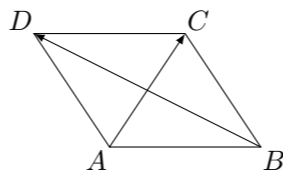
一、选择题

1. i 是虚数单位, $\frac{i^3(i+1)}{i-1} =$ ()
 (A) -1 (B) 1 (C) $-i$ (D) i
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geq 0, \\ x+y \leq 1, \\ x+2y \geq 1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 5x + y$ 的最大值为 ()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
3. 设函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 是 ()
 (A) 最小正周期为 π 的奇函数 (B) 最小正周期为 π 的偶函数
 (C) 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数 (D) 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数
4. 设 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 则 $a \perp b$ 的一个充分条件是 ()
 (A) $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$ (B) $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$
 (C) $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$ (D) $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$
5. 设椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2-1} = 1$ ($m > 1$) 上一点 P 到其左焦点的距离为 3 , 到右焦点的距离为 1 , 则 P 点到右准线的距离为 ()
 (A) 6 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
6. 设集合 $S = \{x \mid |x-2| > 3\}$, $T = \{x \mid a < x < a+8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $-3 < a < -1$ (B) $-3 \leq a \leq -1$
 (C) $a \leq -3$ 或 $a \geq -1$ (D) $a < -3$ 或 $a > -1$
7. 设函数 $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ ($0 \leq x < 1$) 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 ()
 (A) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最大值为 1
 (B) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最小值为 0
 (C) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最大值为 1
 (D) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最小值为 0
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0, \\ x-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则不等式 $x + (x+1)f(x+1) \leq 1$ 的解集是 ()
 (A) $\{x \mid -1 \leq x \leq \sqrt{2}-1\}$ (B) $\{x \mid x \leq 1\}$
 (C) $\{x \mid x \leq \sqrt{2}-1\}$ (D) $\{x \mid -\sqrt{2}-1 \leq x \leq \sqrt{2}-1\}$

9. 已知函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 令 $a = f\left(\sin \frac{2\pi}{7}\right)$, $b = f\left(\cos \frac{5\pi}{7}\right)$, $c = f\left(\tan \frac{5\pi}{7}\right)$, 则 ()
 (A) $b < a < c$ (B) $c < b < a$ (C) $b < c < a$ (D) $a < b < c$
10. 有 8 张卡片分别标有数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, 从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列, 要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5 , 则不同的排法共有 ()
 (A) 1344 种 (B) 1248 种 (C) 1056 种 (D) 960 种

二、填空题

11. $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的二项展开式中, x^2 的系数是_____. (用数字作答)
12. 一个正方体的各定点均都在同一球的球面上, 若该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则该正方体的表面积为_____.
13. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点关于直线 $y = x$ 对称. 直线 $4x - 3y - 2 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 6$, 则圆 C 的方程为_____.
14. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AC} = (1, 2)$, $\vec{BD} = (-3, 2)$, 则 $\vec{AD} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} =$ _____.



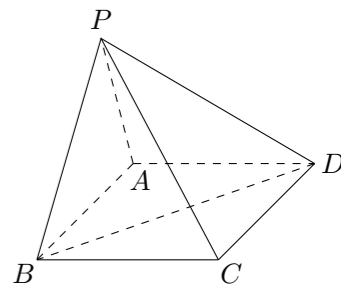
15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____.
16. 设 $a > 1$, 若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x \in [a, 2a]$, 都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = c$, 这时, a 的取值的集合为_____.

三、解答题

17. 已知 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.
 (1) 求 $\sin x$ 的值;
 (2) 求 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 p , 且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\frac{1}{16}$.
 (1) 求乙投球的命中率 p ;
 (2) 若甲投球 1 次, 乙投球 2 次, 两人共命中的次数记为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. 已知 $AB = 3$, $AD = 2$, $PA = 2$, $PD = 2\sqrt{2}$, $\angle PAB = 60^\circ$.
 (1) 证明 $AD \perp$ 平面 PAB ;
 (2) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;
 (3) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + b$ ($x \neq 0$), 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = 3x + 1$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 - (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 - (3) 若对于任意的 $a \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 不等式 $f(x) \leq 10$ 在 $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.
21. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3, 0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x - 2y = 0$.
- (1) 求双曲线 C 的方程;
 - (2) 若以 k ($k \neq 0$) 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N , 线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.
22. 在数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中, $a_1 = 1, b_1 = 4$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1} - (n+3)S_n = 0$, $2a_{n+1}$ 为 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求 a_2, b_2 的值;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中的通项公式;
 - (3) 设 $T_n = (-1)^{a_1}b_1 + (-1)^{a_2}b_2 + \cdots + (-1)^{a_n}b_n, n \in \mathbf{N}^*$, 证明 $|T_n| < 2n^2, n \geq 3$.