2008 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

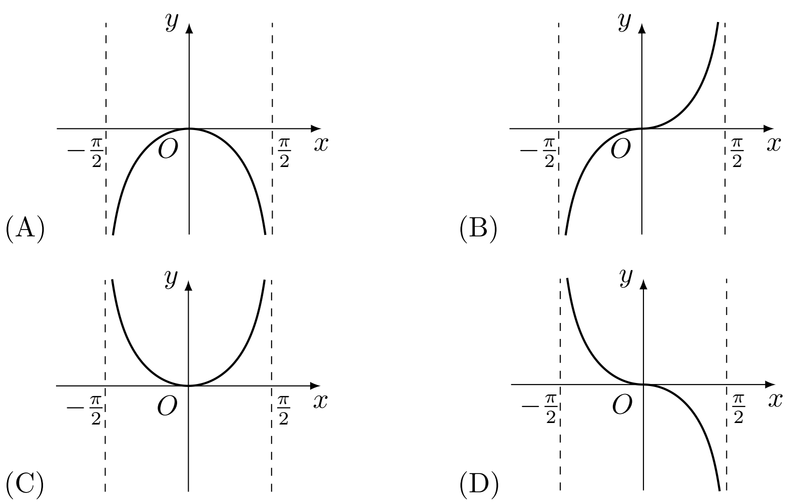
1. 满足 $M \subseteq \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1,\ a_2,\ a_3\} = \{a_1,\ a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设 z 的共轭复数是 $\overline{z}$, 或 $z + \overline{z} = 4$, $z \cdot \overline{z} = 8$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{z}$ 等于 ( )

(A) i (B) $-$i (C) $\pm$1 (D) $\pm$i

3. 函数 $y = \ln\cos x\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 ( )



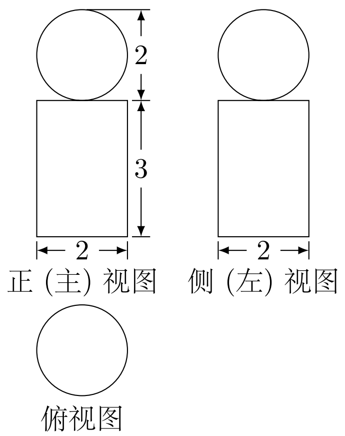
4. 设函数 $f(x) = |x+1| + |x-a|$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则 a 的值为 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) -1

5. 已知 $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha = \dfrac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \dfrac{7\pi}{6}\right)$ 的值是 ( )

(A) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ (C) $-\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

6. 如图是一个几何体的三视图, 根据图中数据, 可得该几何体的表面积是( )



(A) 9π (B) 10π (C) 11π (D) 12π

7. 在某地的奥运火炬传递活动中, 有编号为 1, 2, 3, $\cdots$, 18 的 18 名火炬手. 若从中任选 3 人, 则选出的火炬手的编号能组成 3 为公差的等差数列的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{51}$ (B) $\dfrac{1}{68}$ (C) $\dfrac{1}{306}$ (D) $\dfrac{1}{408}$

8. 如图是根据《山东统计年鉴 2007》中的资料作成的 1997 年至 2006 年我省城镇居民百户家庭人口数的茎叶图. 图中左边的数字从左到右分别表示城镇居民百户家庭人口数的百位数字和十位数字, 右边的数字表示城镇居民百户家庭人口数的个位数字, 从图中可以得到 1997 年至 2006 年我省城镇居民百户家庭人口数的平均数为 ( )

29	1	1	5	8
30	2	6		
31	0	2	4	7

(A) 304.6 (B) 303.6 (C) 302.6 (D) 301.6

9. $\left(x - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$ 展开式中的常数项为 ( )

(A) -1320 (B) 1320 (C) -220 (D) 220

10. 设椭圆 C_1 的离心率为 $\dfrac{5}{13}$, 焦点在 x 轴上且长轴长为 25. 若曲线 C_2 上的点到椭圆 C_1 的两个焦点的距离的差的绝对值等于 8, 则曲线 C_2 的标准方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ (B) $\dfrac{x^2}{13^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ (C) $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ (D) $\dfrac{x^2}{13^2} - \dfrac{y^2}{12^2} = 1$

11. 已知圆的方程为 $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. 设该圆过点 $(3, 5)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 ( )

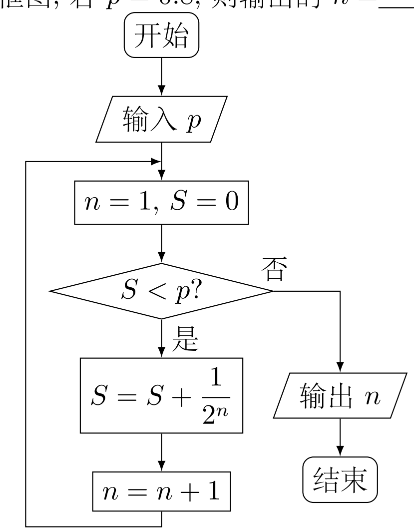
(A) $10\sqrt{6}$ (B) $20\sqrt{6}$ (C) $30\sqrt{6}$ (D) $40\sqrt{6}$

12. 设二元一次不等式组 $\begin{cases} x + 2y - 19 \geqslant 0, \\ x - y + 8 \geqslant 0, \\ 2x + y - 14 \leqslant 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域为 M, 使函数 $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$ 的图象过区域 M 的 a 的取值范围是 ( )

(A) $[1, 3]$ (B) $\left[2, \sqrt{10}\right]$ (C) $[2, 9]$ (D) $\left[\sqrt{10}, 9\right]$

二、填空题

13. 执行下面的程序框图, 若 $p = 0.8$, 则输出的 $n =$______.



14. 设函数 $f(x) = ax^2 + c\ (a \neq 0)$. 若 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$, $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$, 则 x_0 的值为______.

15. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 向量 $\boldsymbol{m} = \left(\sqrt{3}, -1\right)$, $\boldsymbol{n} = (\cos A, \sin A)$. 若 $\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{n}$, 且 $a\cos B + b\cos A = c\sin C$, 则角 $B =$______.

16. 若不等式 $|3x - b| < 4$ 的解集中的整数有且仅有 1, 2, 3, 则 b 的取值范围为______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ $(0 < \varphi < \pi,\ \omega > 0)$ 为偶函数, 且函数 $y = f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后, 再将得到的图象上各点的横坐标舒畅长到原来的 4 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

18. 甲、乙两队参加奥运知识竞赛, 每队 3 人, 每人回答一个问题, 答对者为本队赢得一分, 答错得零分. 假设甲队中每人答对的概率均为 $\dfrac{2}{3}$, 乙队中 3 人答对的概率分别为 $\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}$ 且各人正确与否相互之间没有影响. 用 ξ 表示甲队的总得分.

(1) 求随机变量 ξ 分布列和数学期望;

(2) 用 A 表示"甲、乙两个队总得分之和等于 3"这一事件, 用 B 表示"甲队总得分大于乙队总得分"这一事件, 求 $P(AB)$.

19. 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

$$\begin{array}{llll} a_1 & & & \\ a_2 & a_3 & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \cdots\cdots & & & \end{array}$$

记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$. S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $\dfrac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1\ (n \geqslant 2)$.

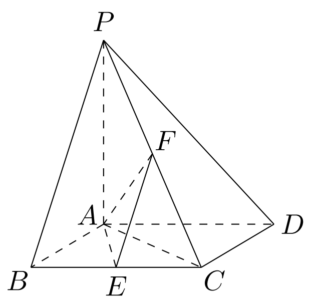
(1) 证明数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 上表中, 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数. 当 $a_{81} = -\dfrac{4}{91}$ 时, 求上表中第 k $(k \geqslant 3)$ 行所有项和的和.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 为菱形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle ABC = 60°$, E, F 分别是 BC, PC 的中点.

(1) 证明: $AE \perp PD$;

(2) 若 H 为 PD 上的动点, EH 与平面 PAD 所成最大角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求二面角 $E-AF-C$ 的余弦值.



21. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n} + a\ln(x-1)$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, a 为常数.

(1) 当 $n = 2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 当 $a = 1$ 时, 证明: 对任意的正整数 n, 当 $x \geqslant 2$ 时, 有 $f(x) \leqslant x - 1$.

22. 如图, 设抛物线方程为 $x^2 = 2py\ (p > 0)$, M 为直线 $y = -2p$ 上任意一点, 过 M 引抛物线的切线, 切点分别为 A, B.

(1) 求证: A, M, B 三点的横坐标成等差数列;

(2) 已知当 M 点的坐标为 $(2, -2p)$ 时, $|AB| = 4\sqrt{10}$, 求此时抛物线的方程;

(3) 是否存在点 M, 使得点 C 关于直线 AB 的对称点 D 在抛物线 $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ 上, 其中, 点 C 满足 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (O 为坐标原点). 若存在, 求出所有适合题意的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.