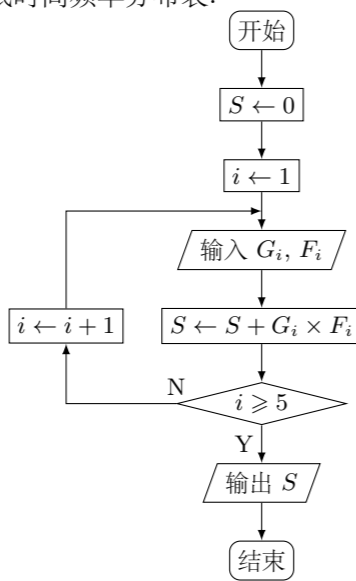


2008 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

- 若函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$, 则 $\omega =$ _____.
- 若将一颗质地均匀的骰子 (一种各面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和为 4 的概率是_____.
- 若将复数 $\frac{1+i}{1-i}$ 表示为 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位) 的形式, 则 $a+b =$ _____.
- 设集合 $A = \left\{x \mid (x-1)^2 < 3x+7, x \in \mathbf{R}\right\}$, 则集合 $A \cap \mathbf{Z}$ 中有_____个元素.
- 已知向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 120° , $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 3$, 则 $|5\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ _____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 D 是横坐标与纵坐标的绝对值均不大于 2 的点构成的区域, E 是到原点的距离不大于 1 的点构成的区域. 向 D 中随机投一点, 则所投的点落在 E 中的概率是_____.
- 某地区为了解 70~80 岁老人的日平均睡眠时间 (单位: h), 随机选择了 50 位老人进行调查. 下表是 50 位老人日睡眠时间频率分布表:

序号 (i)	分组 (睡眠时间)	组中值 (G_i)	频数 (人数)	频率 (F_i)
1	[4,5)	4.5	6	0.12
2	[5,6)	5.5	10	0.20
3	[6,7)	6.5	20	0.40
4	[7,8)	7.5	10	0.20
5	[8,9]	8.5	4	0.08



在上述统计数据中, 一部分计算见算法流程图, 则输出的 S 的值为_____.

- 设直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 是曲线 $y = \ln x$ ($x > 0$) 的一条切线, 则实数 b 的值为_____.
- 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$; 点 $P(0, p)$ 为线段 AO 上的一点 (异于端点), 这里 a, b, c, p 为非零实数. 设直线 BP, CP 分别与边 AC, AB 交于点 E, F . 某同学已正确求得 OE 的方程: $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)x + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a}\right)y = 0$. 请你完成直线 OF 的方程: $(\quad)x + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{a}\right)y = 0$.

- 将全体正整数排成一个三角形数阵:

```

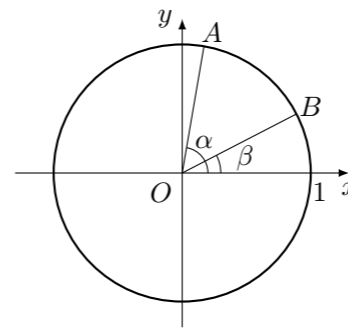
1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
... ..
    
```

根据以上排列规律, 数阵中第 n ($n \geq 3$) 行的从左向右的第 3 个数是_____.

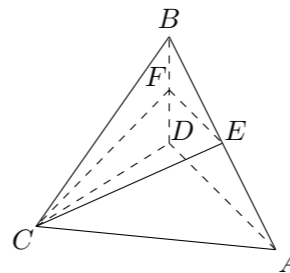
- 设 x, y, z 为正实数, 满足 $x - 2y + 3z = 0$, 则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为_____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 $2c$, 以点 O 为圆心, a 为半径作圆 M . 若过点 $\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ 所作圆 M 的两条切线互相垂直, 则该椭圆的离心率 $e =$ _____.
- 满足条件 $AB = 2, AC = \sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是_____.
- 设函数 $f(x) = ax^3 - 3x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$), 若对于任意 $x \in [-1, 1]$, 都有 $f(x) \geq 0$ 成立, 则实数 a 的值为_____.

二、解答题

- 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 Ox 轴为始边做两个锐角 α, β , 它们的终边分别与单位圆交于 A, B 两点. 已知 A, B 的横坐标分别为 $\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{2\sqrt{5}}{5}$.
 - 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值;
 - 求 $\alpha + 2\beta$ 的值.



- 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $CB = CD, AD \perp BD$, 点 E, F 分别是 AB, BD 的中点. 求证:
 - 直线 $EF \parallel$ 平面 ACD ;
 - 平面 $EFC \perp$ 平面 BCD .

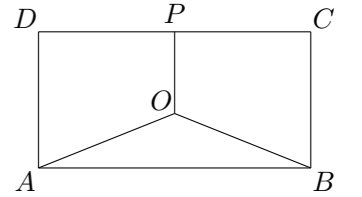


- 如图, 某地有三家工厂, 分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A, B 及 CD 的中点 P 处, 已知 $AB = 20$ km, $BC = 10$ km. 为了处理三家工厂的污水, 现要在矩形区域上 (含边界), 且与 A, B 等距离的一点 O 处建造一个污水处理厂, 并铺设三条排污管道 AO, BO, PO . 记排污管道的总长度为 y km.

(1) 按下列要求写出函数关系式:

- ① 设 $\angle BAO = \theta$ (rad), 将 y 表示为 θ 的函数;
- ② 设 $OP = x$ (km), 将 y 表示为 x 的函数;

(2) 请你选用 (1) 中的一个函数关系式, 确定污水处理厂的位置, 使铺设的排污管道的总长度最短.



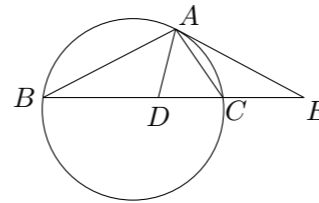
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 设二次函数 $f(x) = x^2 + 2x + b$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象与两坐标轴有三个交点, 经过这三个交点的圆记为 C .

- 求实数 b 的取值范围;
- 求圆 C 的方程;
- 问圆 C 是否经过定点 (其坐标与 b 无关)? 请证明你的结论.

19. (1) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是各项均不为零的 n ($n \geq 4$) 项等差数列, 且公差 $d \neq 0$. 若将此数列删去某一项得到的数列 (按原来的顺序) 是等比数列,
 ① 当 $n = 4$ 时, 求 $\frac{a_1}{d}$ 的数值;
 ② 求 n 的所有可能值.
 (2) 求证: 对于给定的正整数 n ($n \geq 4$), 存在一个各项及公差都不为零的等差数列 b_1, b_2, \dots, b_n , 其中任意三项 (按原来顺序) 都不能组成等比数列.

20. 已知函数 $f_1(x) = 3^{|x-p_1|}$, $f_2(x) = 2 \cdot 3^{|x-p_2|}$ ($x \in \mathbf{R}$, p_1, p_2 为常数). 函数 $f(x)$ 定义为: 对每个给定的实数 x , $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{若 } f_1(x) \leq f_2(x), \\ f_2(x), & \text{若 } f_1(x) > f_2(x). \end{cases}$
 (1) 求 $f(x) = f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件 (用 p_1, p_2 表示);
 (2) 设 a, b 是两个实数, 满足 $a < b$, 且 $p_1, p_2 \in (a, b)$. 若 $f(a) = f(b)$, 求证: $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\frac{b-a}{2}$. (闭区间 $[m, n]$ 的长度定义为 $n - m$)

21. 四选二. 【A】如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AE 与 BC 的延长线交于点 E , $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 D . 求证: $ED^2 = EC \cdot EB$.

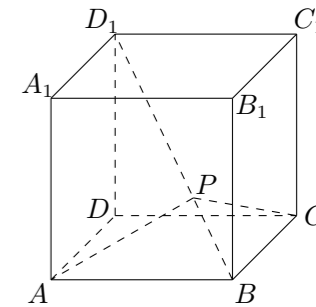


【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 在矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 对应的变换下得到曲线 F , 求 F 的方程.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $P(x, y)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上的一个动点, 求 $S = x + y$ 的最大值.

【D】设 a, b, c 为正实数, 求证: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + abc \geq 2\sqrt{3}$.

22. 如图, 设动点 P 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上, 记 $\frac{D_1P}{D_1B} = \lambda$. 当 $\angle APC$ 为钝角时, 求 λ 的取值范围.



23. 请先阅读: 在等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ($x \in \mathbf{R}$) 的两边对 x 求导 $(\cos 2x)' = (2\cos^2 x - 1)'$. 由求导法则得 $(-\sin 2x) \cdot 2 = 4\cos x \cdot (-\sin x)$, 化简得等式 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.
 (1) 利用上述想法 (或者其他方法), 试由等式 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ ($x \in \mathbf{R}$, 整数 $n \geq 2$) 证明: $n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum_{k=2}^n k C_n^k x^{k-1}$;
 (2) 对于正整数 $n \geq 3$, 求证:
 ① $\sum_{k=1}^n (-1)^k k C_n^k = 0$;
 ② $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 C_n^k = 0$;
 ③ $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.