

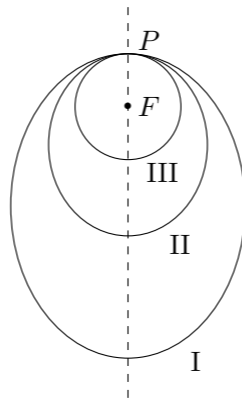
2008 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

1. 设 $\mathbf{a} = (1, -2)$, $\mathbf{b} = (-3, 4)$, $\mathbf{c} = (3, 2)$, 则 $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$ ()
 (A) $(-15, 12)$ (B) 0 (C) -3 (D) -11
2. 若非空集合 A, B, C 满足 $A \cup B = C$, 且 B 不是 A 的子集, 则 ()
 (A) “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件但不是必要条件
 (B) “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件
 (C) “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充要条件
 (D) “ $x \in C$ ”既不是“ $x \in A$ ”的充分条件也不是“ $x \in A$ ”必要条件
3. 用与球心距离为 1 的平面去截球, 所得的截面面积为 π , 则球的体积为 ()
 (A) $\frac{8\pi}{3}$ (B) $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ (C) $8\sqrt{2}\pi$ (D) $\frac{32\pi}{3}$
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \ln(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 - 3x + 4})$ 的定义域为 ()
 (A) $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ (B) $(-4, 0) \cup (0, 1)$
 (C) $[-4, 0) \cup (0, 1]$ (D) $[-4, 0) \cup (0, 1)$
5. 将函数 $y = 3\sin(x - \theta)$ 的图象 F 按向量 $(\frac{\pi}{3}, 3)$ 平移得到图象 F' , 若 F' 的一条对称轴是直线 $x = \frac{\pi}{4}$, 则 θ 的一个可能取值是 ()
 (A) $\frac{5}{12}\pi$ (B) $-\frac{5}{12}\pi$ (C) $\frac{11}{12}\pi$ (D) $-\frac{11}{12}\pi$
6. 将 5 名志愿者分配到 3 个不同的奥运场馆参加接待工作, 每个场馆至少分配一名志愿者的方案种数为 ()
 (A) 540 (B) 300 (C) 180 (D) 150
7. 若 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b\ln(x+2)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是减函数, 则 b 的取值范围是 ()
 (A) $[-1, +\infty)$ (B) $(-1, +\infty)$ (C) $(-\infty, -1]$ (D) $(-\infty, -1)$
8. 已知 $m \in \mathbf{N}^*$, $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m + a}{x} = b$, 则 $a \cdot b =$ ()
 (A) $-m$ (B) m (C) -1 (D) 1
9. 过点 $A(11, 2)$ 作圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 164 = 0$ 的弦, 其中弦长为整数的共有 ()
 (A) 16 条 (B) 17 条 (C) 32 条 (D) 34 条
10. 如图所示, “嫦娥一号”探月卫星沿地月转移轨道飞向月球, 在月球附近一点 P 轨进入以月球球心 F 为一个焦点的椭圆轨道 I 绕月飞行, 之后卫星在 P 点第二次变轨进入仍以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月飞行, 最终卫星在 P 点第三次变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月飞行, 若用 $2c_1$ 和 $2c_2$ 分别表示椭圆轨道 I 和 II 的焦距, 用 $2a_1$ 和 $2a_2$ 分别表示椭圆轨道 I 和

II 的长轴的长, 给出下列式子:

- ① $a_1 + c_1 = a_2 + c_2$; ② $a_1 - c_1 = a_2 - c_2$; ③ $c_1 a_2 > a_1 c_2$; ④ $\frac{c_1}{a_1} < \frac{c_2}{a_2}$.
 其中正确式子的序号是 ()



- (A) ①③ (B) ②③ (C) ①④ (D) ②④

二、填空题

11. 设 z_1 是复数, $z_2 = z_1 - i\bar{z}_1$ (其中 \bar{z}_1 表示 z_1 的共轭复数), 已知 z_2 的实部是 -1 , 则 z_2 的虚部为_____.
12. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个角 A, B, C 的对边边长分别为 $a = 3, b = 4, c = 6$, 则 $bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C$ 的值为_____.
13. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + a, f(bx) = 9x^2 - 6x + 2$, 其中 $x \in \mathbf{R}, a, b$ 为常数, 则方程 $f(ax + b) = 0$ 的解集为_____.
14. 已知函数 $f(x) = 2^x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2. 若 $f(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}) = 4$, 则 $\log_2[f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3) \cdots f(a_{10})] =$ _____.
15. 观察下列等式:
 $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$
 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$
 $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$
 $\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n^2,$
 $\sum_{i=1}^n i^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2,$
 $\sum_{i=1}^n i^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n^2,$

 $\sum_{i=1}^n i^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + a_{k-2}n^{k-2} + \cdots + a_1 n + a_0,$
 可以推测, 当 $k \geq 2 (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_{k+1} = \frac{1}{k+1}, a_k = \frac{1}{2}, a_{k-1} =$ _____,
 $a_{k-2} =$ _____.

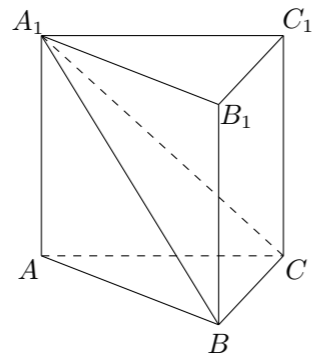
三、解答题

16. 已知函数 $f(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, g(x) = \cos x \cdot f(\sin x) + \sin x \cdot f(\cos x),$
 $x \in (\pi, \frac{17\pi}{12}]$.
 (1) 将函数 $g(x)$ 化简成 $A \sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0, \varphi \in [0, 2\pi))$ 的形式;
 (2) 求函数 $g(x)$ 的值域.
17. 袋中有 20 个大小相同的球, 其中记上 0 号的有 10 个, 记上 n 号的有 n 个 ($n = 1, 2, 3, 4$). 现从袋中任取一球. ξ 表示所取球的标号.
 (1) 求 ξ 的分布列, 期望和方差;
 (2) 若 $\eta = a\xi + b, E\eta = 1, D\eta = 11$, 试求 a, b 的值.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 .

(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ , 二面角 $A_1 - BC - A$ 的大小为 φ , 试判断 θ 与 φ 的大小关系, 并予以证明.



20. 水库的蓄水量随时间而变化. 现用 t 表示时间, 以月为单位, 年初为起点. 根据历年数据, 某水库的蓄水量 (单位: 亿立方米) 关于 t 的近似函数关系

$$V(t) = \begin{cases} (-t^2 + 14t - 40)e^{\frac{1}{4}t} + 50, & 0 < t \leq 10, \\ 4(t - 10)(3t - 41) + 50, & 10 < t \leq 12. \end{cases}$$

(1) 该水库的蓄水量小于 50 的时期称为枯水期. 以 $i - 1 < t < i$ 表示第 i 月份 ($i = 1, 2, \dots, 12$), 同一年内哪几个月份是枯水期?

(2) 求一年内该水库的最大蓄水量 (取 $e = 2.7$ 计算).

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1 = \lambda$, $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + n - 4$, $b_n = (-1)^n(a_n - 3n + 21)$, 其中 λ 为实数, n 为正整数.

(1) 对任意实数 λ , 证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列;

(2) 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;

(3) 设 $0 < a < b$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ , 使得对任意正整数 n , 都有 $a < S_n < b$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

19. 如图, 在以点 O 为圆心, $|AB| = 4$ 为直径的半圆 ADB 中, $OD \perp AB$, P 是半圆弧上一点, $\angle POB = 30^\circ$, 曲线 C 是满足 $||MA| - |MB||$ 为定值的动点 M 的轨迹, 且曲线 C 过点 P .

(1) 建立适当的平面直角坐标系, 求曲线 C 的方程;

(2) 设过点 D 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E, F . 若 $\triangle OEF$ 的面积不小于 $2\sqrt{2}$, 求直线 l 斜率的取值范围.

