

2008 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

一、选择题

- 已知 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M = \{3, 4, 5, 7\}$, $N = \{2, 4, 5, 6\}$, 则()
 (A) $M \cap N = \{4, 6\}$ (B) $M \cup N = U$
 (C) $(\complement_U N) \cup M = U$ (D) $(\complement_U M) \cap N = N$
- " $|x - 1| < 2$ "是" $x < 3$ "的()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq 2, \\ x - y \leq 0, \end{cases}$ 则 $x + y$ 的最小值是()
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
- 函数 $f(x) = x^2 (x \leq 0)$ 的反函数是()
 (A) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ (B) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} (x \geq 0)$
 (C) $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x} (x \leq 0)$ (D) $f^{-1}(x) = -x^2 (x \leq 0)$
- 已知直线 m, n 和平面 α, β 满足 $m \perp n, m \perp \alpha, \alpha \perp \beta$, 则()
 (A) $n \perp \beta$ (B) $n \parallel \beta$, 或 $n \subset \beta$
 (C) $n \perp \alpha$ (D) $n \parallel \alpha$, 或 $n \subset \alpha$
- 下面不等式成立的是()
 (A) $\log_3 2 < \log_2 3 < \log_2 5$ (B) $\log_3 2 < \log_2 5 < \log_2 3$
 (C) $\log_2 3 < \log_3 2 < \log_2 5$ (D) $\log_2 3 < \log_2 5 < \log_3 2$
- 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, AC = 2, BC = \sqrt{10}$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$ ()
 (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$
- 某市拟从 4 个重点项目和 6 个一般项目中各选 2 个项目作为本年度启动的项目, 则重点项目 A 和一般项目 B 至少有一个被选中的不同选法种数是()
 (A) 15 (B) 45 (C) 60 (D) 75
- 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一个球面上, 且 $AB = 2, AD = \sqrt{3}, AA_1 = 1$, 则顶点 A, B 间的球面距离是()
 (A) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (C) $\sqrt{2}\pi$ (D) $2\sqrt{2}\pi$
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离相等, 则双曲线离心率的取值范围是()
 (A) $(1, \sqrt{2}]$ (B) $[\sqrt{2}, +\infty)$ (C) $(1, \sqrt{2} + 1]$ (D) $[\sqrt{2} + 1, +\infty)$

二、填空题

- 已知向量 $a = (1, \sqrt{3}), b = (-2, 0)$, 则 $|a + b| =$ _____.
- 从某地区 15000 位老人中随机抽取 500 人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

生活能否自理 \ 性别	人数	
	男	女
能	178	278
不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多_____人.

- 记 $(2x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中第 m 项的系数为 b_m , 若 $b_3 = 2b_4$, 则 $n =$ _____.
- 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 沿 x 轴正向平移 1 个单位后所得圆 C , 则圆 C 的方程是_____; 若过点 $(3, 0)$ 的直线 l 和圆 C 相切, 则直线 l 的斜率为_____.
- 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (如 $[2] = 2, [\frac{5}{4}] = 1$). 对于给定的 $n \in \mathbf{N}^*$, 定义 $C_n^x = \frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}, x \in [1, +\infty)$, 则 $C_8^{\frac{3}{2}} =$ _____; 当 $x \in [2, 3)$ 时, 函数 C_8^x 的值域是_____.

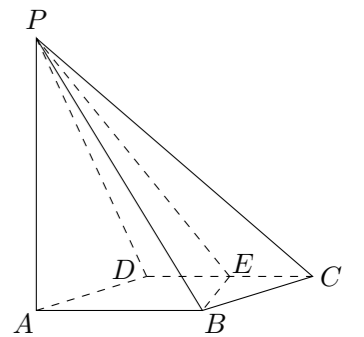
三、解答题

- 甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约. 甲表示只要面试合格就签约. 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约. 设每人面试合格的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且面试是否合格互不影响. 求:
 (1) 至少有 1 人面试合格的概率;
 (2) 没有人签约的概率.

- 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x$.

- 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- 当 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ 且 $f(x_0) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值.

- 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BCD = 60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA \perp$ 底面 $ABCD, PA = \sqrt{3}$.
 (1) 证明: 平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ;
 (2) 求二面角 $A - BE - P$ 的大小.



19. 已知椭圆的中心在原点, 一个焦点是 $F(2, 0)$, 且两条准线间的距离为 λ ($\lambda > 4$).
- (1) 求椭圆的方程;
 - (2) 若存在过点 $A(1, 0)$ 的直线 l , 使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上, 求 λ 的取值范围.
20. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \left(1 + \cos^2 \frac{n\pi}{2}\right) a_n + \sin^2 \frac{n\pi}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$.
- (1) 求 a_3, a_4 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 设 $S_k = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}, T_k = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}, W_k = \frac{2S_k}{2 + T_k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 求使 $W_k > 1$ 的所有 k 的值, 并说明理由.
21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$ 有三个极值点.
- (1) 证明: $-27 < c < 5$;
 - (2) 若存在实数 c , 使函数 $f(x)$ 在区间 $[a, a+2]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.