2008 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 复数 $\left(\mathrm{i}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}\right)^3$ 等于 ( )

(A) 8 (B) -8 (C) 8i (D) $-8\mathrm{i}$

2. "$|x-1|<2$ 成立"是"$x(x-3)<0$ 成立"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x、y 满足条件 $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x-y \leqslant 0, \\ x+2y-9 \leqslant 0, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值是 ( )

(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 8

4. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,9)$, 若 $P(\xi>c+1)=P(\xi<c-1)$, 则 $c=$ ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 设有直线 m、n 和平面 α、β. 下列四个命题中, 正确的是 ( )

(A) 若 $m \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$

(B) 若 $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$, $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$

(C) 若 $\alpha \perp \beta$, $m \subset \alpha$, 则 $m \perp \beta$

(D) 若 $\alpha \perp \beta$, $m \perp \beta$, $m \not\subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$

6. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $1+\sqrt{3}$

7. 设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点, 且 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$, 则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ ( )

(A) 反向平行 (B) 同向平行

(C) 互相垂直 (D) 既不平行也不垂直

8. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 上横坐标为 $\dfrac{3a}{2}$ 的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离, 则双曲线离心率的取值范围是 ( )

(A) $(1,2)$ (B) $(2,+\infty)$ (C) $(1,5)$ (D) $(5,+\infty)$

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$, $AA_1=1$, 则顶点 A、B 间的球面距离是 ( )

(A) $2\sqrt{2}\pi$ (B) $\sqrt{2}\pi$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$

10. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (如 $[2]=2$, $\left[\dfrac{5}{4}\right]=1$). 对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$, 定义 $\mathrm{C}_n^x=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$, $x\in[1,+\infty)$, 则当 $x\in\left[\dfrac{3}{2},3\right)$ 时, 函数 C_8^x 的值域是 ( )

(A) $\left[\dfrac{16}{3},28\right]$ (B) $\left[\dfrac{16}{3},56\right)$

(C) $\left(4,\dfrac{28}{3}\right)\cup[28,56)$ (D) $\left(4,\dfrac{16}{3}\right]\cup\left(\dfrac{28}{3},28\right]$

二、填空题

11. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+3x-4}=$______.

12. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的右焦点为 F, 右准线为 l, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 过顶点 $A(0,b)$ 作 $AM\perp l$, 垂足为 M, 则直线 FM 的斜率等于______.

13. 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$, 且函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点 $(1,2)$. 则函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点______.

14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-ax}}{a-1}$ $(a\neq1)$.

(1) 若 $a>1$, 则 $f(x)$ 的定义域是______;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是______.

15. 对有 n $(n\geqslant4)$ 个元素的总体 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 进行抽样, 先将总体分成两个子总体 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 和 $\{m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n\}$ (m 是给定的正整数, 且 $2\leqslant m\leqslant n-2$), 再从每个子总体中各随机抽取 2 个元素组成样本, 用 P_{ij} 表示元素 i 和 j 同时出现在样本中的概率, 则 $P_{1n}=$______; 所有 P_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 的和等于______.

三、解答题

16. 甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约. 甲表示只要面试合格就签约. 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约. 设每人面试合格的概率都是 $\dfrac{1}{2}$, 且面试是否合格互不影响. 求:

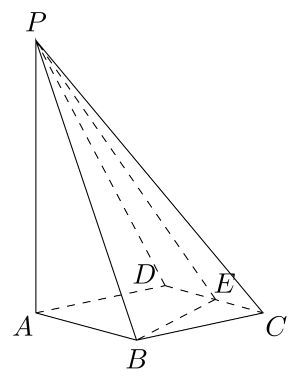
(1) 至少有 1 人面试合格的概率;

(2) 签约人数 ξ 的分布列和数学期望.

17. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BCD=60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=2$.

(1) 证明: 平面 $PBE\perp$ 平面 PAB;

(2) 求平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角 (锐角) 的大小.



18. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\left(1+\cos^2\dfrac{n\pi}{2}\right)a_n+\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$, $n=1,2,3,\cdots$.

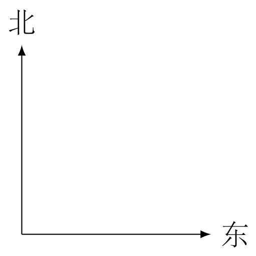
(1) 求 a_3, a_4, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. 证明: 当 $n\geqslant6$ 时, $|S_n-2|<\dfrac{1}{n}$.

19. 在一个特定时段内, 以点 E 为中心的 7 海里以内海域被设为警戒水域. 点 E 正北 55 海里处有一个雷达观测站 A. 某时刻测得一艘匀速直线行驶的船只位于点 A 北偏东 45° 且与点 A 相距 $40\sqrt{2}$ 海里的位置 B, 经过 40 分钟又测得该船已行驶到点 A 北偏东 $45^\circ+\theta$ (其中 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$, $0^\circ<\theta<90^\circ$) 且与点 A 相距 $10\sqrt{13}$ 海里的位置 C.

(1) 求该船的行驶速度 (单位: 海里/小时);

(2) 若该船不改变航行方向继续行驶, 判断它是否会进入警戒水域, 并说明理由.



20. 若 A、B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的不同两点, 弦 AB (不平行于 y 轴) 的垂直平分线与 x 轴相交于点 P, 则称弦 AB 是点 P 的一条“相关弦”. 已知当 $x>2$ 时, 点 $P(x,0)$ 存在无穷多条“相关弦”. 给定 $x_0>2$.

(1) 证明: 点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标相同;

(2) 试问: 点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的弦长中是否存在最大值? 若存在, 求其最大值 (用 x_0 表示); 若不存在, 请说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=\ln^2(1+x)-\dfrac{x^2}{1+x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立 (其中 e 是自然对数的底数), 求 α 的最大值.