

## 2008 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

### 一、选择题

1. 已知集合  $M = \left\{x \mid \frac{x+3}{x-1} < 0\right\}$ ,  $N = \{x \mid x \leq -3\}$ , 则集合  $\{x \mid x \geq 1\} =$  ( )  
 (A)  $M \cap N$  (B)  $M \cup N$  (C)  $\complement_{\mathbf{R}}(M \cap N)$  (D)  $\complement_{\mathbf{R}}(M \cup N)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n(2n+1)} =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2
3. 圆  $x^2 + y^2 = 1$  与直线  $y = kx + 2$  没有公共点的充要条件是 ( )  
 (A)  $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  (B)  $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$   
 (C)  $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  (D)  $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
4. 复数  $\frac{1}{-2+i} + \frac{1}{1-2i}$  的虚部是 ( )  
 (A)  $\frac{1}{5}i$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $-\frac{1}{5}i$  (D)  $-\frac{1}{5}$
5. 已知  $O, A, B$  是平面上的三个点, 直线  $AB$  上有一点  $C$ , 满足  $2\vec{AC} + \vec{CB} = \mathbf{0}$ , 则  $\vec{OC} =$  ( )  
 (A)  $2\vec{OA} - \vec{OB}$  (B)  $-\vec{OA} + 2\vec{OB}$  (C)  $\frac{2}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB}$  (D)  $-\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$
6. 设  $P$  为曲线  $C: y = x^2 + 2x + 3$  上的点, 且曲线  $C$  在点  $P$  处切线倾斜角的取值范围是  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , 则点  $P$  横坐标的取值范围是 ( )  
 (A)  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$  (B)  $[-1, 0]$  (C)  $[0, 1]$  (D)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
7. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$
8. 将函数  $y = 2^x + 1$  的图象按向量  $\mathbf{a}$  平移得到函数  $y = 2^{x+1}$  的图象, 则 ( )  
 (A)  $\mathbf{a} = (-1, -1)$  (B)  $\mathbf{a} = (1, -1)$  (C)  $\mathbf{a} = (1, 1)$  (D)  $\mathbf{a} = (-1, 1)$
9. 一生产过程有 4 道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人, 则不同的安排方案共有 ( )  
 (A) 24 种 (B) 36 种 (C) 48 种 (D) 72 种
10. 已知点  $P$  是抛物线  $y^2 = 2x$  上的一个动点, 则点  $P$  到点  $(0, 2)$  的距离与  $P$  到该抛物线准线的距离之和的最小值为 ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$  (B) 3 (C)  $\sqrt{5}$  (D)  $\frac{9}{2}$

11. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为棱  $AA_1, CC_1$  的中点, 则在空间中与三条直线  $A_1D_1, EF, CD$  都相交的直线 ( )  
 (A) 不存在 (B) 有且只有两条 (C) 有且只有三条 (D) 有无数条
12. 设  $f(x)$  是连续的偶函数, 且当  $x > 0$  时  $f(x)$  是单调函数, 则满足  $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$  的所有  $x$  之和为 ( )  
 (A) -3 (B) 3 (C) -8 (D) 8

### 二、填空题

13. 函数  $y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases}$  的反函数是\_\_\_\_\_.
14. 在体积为  $4\sqrt{3}\pi$  的球的表面上有  $A, B, C$  三点,  $AB = 1, BC = \sqrt{2}, A, C$  两点的球面距离为  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ , 则球心到平面  $ABC$  的距离为\_\_\_\_\_.
15. 已知  $(1+x+x^2)\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^n$  的展开式中没有常数项,  $n \in \mathbf{N}^*$  且  $2 \leq n \leq 8$ , 则  $n =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ),  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , 且  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$  有最小值, 无最大值, 则  $\omega =$ \_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  对边的边长分别是  $a, b, c$ . 已知  $c = 2, C = \frac{\pi}{3}$ .  
 (1) 若  $\triangle ABC$  的面积等于  $\sqrt{3}$ , 求  $a, b$ ;  
 (2) 若  $\sin C + \sin(B - A) = 2\sin 2A$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

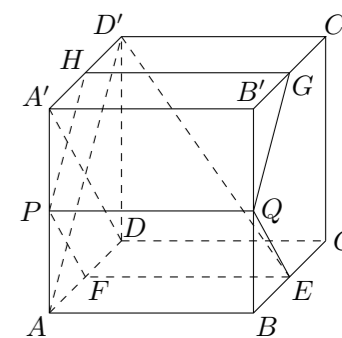
18. 某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近 100 周的统计结果如下表所示:

周销售量	2	3	4
频数	20	50	30

- (1) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为 2 吨, 3 吨和 4 吨的频率;
- (2) 已知每吨该商品的销售利润为 2 千元,  $\xi$  表示该种商品两周销售利润的和 (单位: 千元). 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求  $\xi$  的分布列和数学期望.

19. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  中,  $AP = BQ = b$  ( $0 < b < 1$ ), 截面  $PQEF \parallel A'D$ , 截面  $PQGH \parallel AD'$ .

- (1) 证明: 平面  $PQEF$  和平面  $PQGH$  互相垂直;
- (2) 证明: 截面  $PQEF$  和截面  $PQGH$  面积之和是定值, 并求出这个值;
- (3) 若  $D'E$  与平面  $PQEF$  所成的角为  $45^\circ$ , 求  $D'E$  与平面  $PQGH$  所成角的正弦值.



20. 在直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P$  到两点  $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$  的距离之和为 4, 设点  $P$  的轨迹为  $C$ , 直线  $y = kx + 1$  与  $C$  交于  $A, B$  两点.
- (1) 写出  $C$  的方程;
  - (2) 若  $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ , 求  $k$  的值;
  - (3) 若点  $A$  在第一象限, 证明: 当  $k > 0$  时, 恒有  $|\vec{OA}| > |\vec{OB}|$ .
21. 在数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  中,  $a_1 = 2, b_1 = 4$ , 且  $a_n, b_n, a_{n+1}$  成等差数列,  $b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$  成等比数列.
- (1) 求  $a_2, a_3, a_4$  及  $b_2, b_3, b_4$ , 由此猜测  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式, 并证明你的结论;
  - (2) 证明:  $\frac{1}{a_1 + b_1} + \frac{1}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{1}{a_n + b_n} < \frac{5}{12}$ .
22. 设函数  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x} - \ln x + \ln(x+1)$ .
- (1) 求  $f(x)$  的单调区间和极值;
  - (2) 是否存在实数  $a$ , 使得关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq a$  的解集为  $(0, +\infty)$ ? 若存在, 求  $a$  的取值范围; 若不存在, 试说明理由.