2009 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

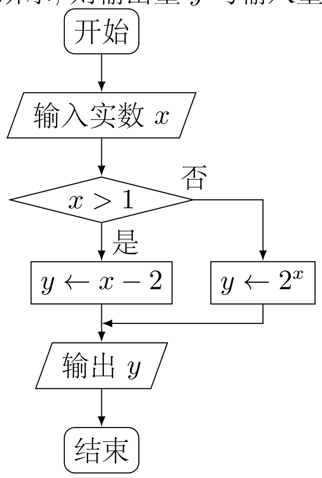
一、填空题

1. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则其共轭复数 $\overline{z}=$______.

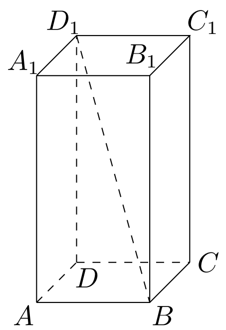
2. 已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant 1\}$, $B=\{x\mid x\geqslant a\}$, 且 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是______.

3. 若行列式 $\begin{vmatrix}4&5&x\\1&x&3\\7&8&9\end{vmatrix}$ 中, 元素 4 的代数余子式大于 0, 则 x 满足的条件是______.

4. 某算法的程序框如图所示, 则输出量 y 与输入量 x 满足的关系式是______.



5. 如图, 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2, 高为 4, 则异面直线 BD_1 与 AD 所成角的大小是______. (结果用反三角函数表示)



6. 函数 $y=2\cos^2 x+\sin 2x$ 的最小值是______.

7. 某学校要从 5 名男生和 2 名女生中选出 2 人作为上海世博会志愿者, 若用随机变量 ξ 表示选出的志愿者中女生的人数, 则数学期望 $E\xi=$______. (结果用最简分数表示)

8. 已知三个球的半径 R_1, R_2, R_3 满足 $R_1+2R_2=3R_3$, 则它们的表面积 S_1, S_2, S_3 满足的等量关系是______.

9. 已知 F_1、F_2 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的两个焦点, P 为椭圆 C 上一点, 且 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9, 则 $b=$______.

10. 在极坐标系中, 由三条直线 $\theta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$ 围成图形的面积是______.

11. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$, 不等式 $\sin\dfrac{\pi x}{2}\geqslant kx$ 成立, 则实数 k 的取值范围是______.

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\tan x$. 项数为 27 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且公差 $d\neq 0$. 若 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{27})=0$, 则当 $k=$______时, $f(a_k)=0$.

13. 某地街道呈现东—西、南—北向的网格状, 相邻街距都为 1, 两街道相交的点称为格点. 若以互相垂直的两条街道为轴建立直角坐标系, 现有下述格点 $(-2,2)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(-2,3)$, $(4,5)$, $(6,6)$ 为报刊零售点. 请确定一个格点 (除零售点外) ______为发行站, 使 6 个零售点沿街道到发行站之间路程的和最短.

14. 将函数 $y=\sqrt{4+6x-x^2}-2$ $(x\in[0,6])$ 的图象绕坐标原点逆时针方向旋转角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$, 得到曲线 C. 若对于每一个旋转角 θ, 曲线 $AA_1=BC=AB=2$ 都是一个函数的图象, 则 α 的最大值为______.

二、选择题

15. “$-2\leqslant a\leqslant 2$”是“实系数一元二次方程 $x^2+ax+1=0$ 有虚根”的 ( )

(A) 必要不充分条件　(B) 充分不必要条件
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

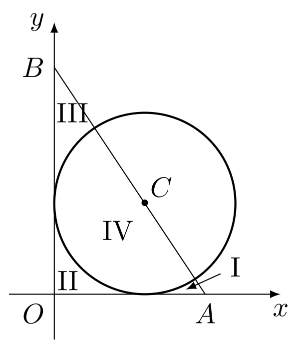
16. 若事件 E 与 F 相互独立, 且 $P(E)=P(F)=\dfrac{1}{4}$, 则 $P(E\cap F)$ 的值等于 ( )

(A) 0　(B) $\dfrac{1}{16}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

17. 在发生某公共卫生事件期间, 有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天, 每天新增疑似病例不超过 7 人”. 根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据, 一定符合该标志的是 ( )

(A) 甲地: 总体均值为 3, 中位数为 4
(B) 乙地: 总体均值为 1, 总体方差大于 0
(C) 丙地: 中位数为 2, 众数为 3
(D) 丁地: 总体均值为 2, 总体方差为 3

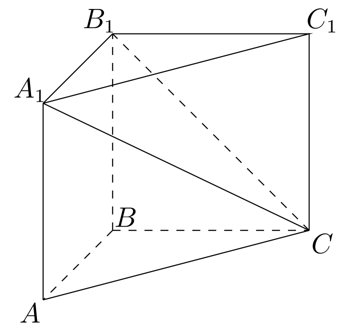
18. 过圆 C: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心, 作直线分别交 x、y 正半轴于点 A、B, $\triangle AOB$ 被圆分成四部分 (如图), 若这四部分图形面积满足 $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{IV}}=S_{\mathrm{II}}+S_{\mathrm{III}}$, 则直线 AB 有 ( )



(A) 0 条　(B) 1 条　(C) 2 条　(D) 3 条

三、解答题

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=BC=AB=2$, $AB\perp BC$, 求二面角 $B_1-A_1C-C_1$ 的大小.



20. 有时可用函数 $f(x)=\begin{cases}0.1+15\ln\dfrac{a}{a-x}, & x\leqslant 6,\\ \dfrac{x-4.4}{x-4}, & x>6,\end{cases}$ 描述学习某学科知识的掌握程度, 其中 x 表示某学科知识的学习次数 $(x\in\mathbf{N}^*)$, $f(x)$ 表示对该学科知识的掌握程度, 正实数 a 与学科知识有关.

(1) 证明: 当 $x\geqslant 7$ 时, 掌握程度的增加量 $f(x+1)-f(x)$ 总是下降;

(2) 根据经验, 学科甲、乙、丙对应的 a 的取值区间分别为 $(115,121]$, $(121,127]$, $(121,133]$. 当学习某学科知识 6 次时, 掌握程度是 85%, 请确定相应的学科.

21. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$, 设过点 $A(-3\sqrt{2},0)$ 的直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{e}=(1,k)$.

(1) 当直线 l 与双曲线 C 的一条渐近线 m 平行时, 求直线 l 的方程及 l 与 m 的距离;

(2) 证明: 当 $k>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 在双曲线 C 的右支上不存在点 Q, 使之到直线 l 的距离为 $\sqrt{6}$.

22. 已知函数 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 定义: 若对给定的实数 a $(a\neq 0)$, 函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f^{-1}(x+a)$ 互为反函数, 则称 $y=f(x)$ 满足"a 和性质"; 若函数 $y=f(ax)$ 与 $y=f^{-1}(ax)$ 互为反函数, 则称 $y=f(x)$ 满足"a 积性质".

(1) 判断函数 $g(x)=x^2$ $(x>0)$ 是否满足"1 和性质", 并说明理由;

(2) 求所有满足"2 和性质"的一次函数;

(3) 设函数 $y=f(x)$ $(x>0)$ 对任何 $a>0$, 满足"a 积性质". 求 $y=f(x)$ 的表达式.

23. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列.

(1) 若 $a_n=3n+1$, 是否存在 m、$k\in\mathbf{N}^*$, 有 $a_m+a_{m+1}=a_k$? 请说明理由;

(2) 找出所有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 使对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$, 并说明理由;

(3) 若 $a_1=5$, $d=4$, $b_1=q=3$, 试确定所有的 p, 使数列 $\{a_n\}$ 中存在某个连续 p 项的和是数列 $\{b_n\}$ 中的一项, 请证明.