

2009 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 \right\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 (A) $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ (B) $\left\{ x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 1 \right\}$
 (C) $\{x \mid x < 2\}$ (D) $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$
2. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$, $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ($k \in \mathbf{R}$), $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. 如果 $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$, 那么 ()
 (A) $k = 1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 同向 (B) $k = 1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 反向
 (C) $k = -1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 同向 (D) $k = -1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 反向
3. 若 $(1 + \sqrt{2})^4 = a + b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a + b =$ ()
 (A) 33 (B) 29 (C) 23 (D) 19
4. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图象, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图象上所有的点 ()
 (A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 (B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 (C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
 (D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
5. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的无重复数字的四位偶数的个数为 ()
 (A) 8 (B) 24 (C) 48 (D) 120
6. “ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
7. 若正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1, AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角, 则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$
8. 设 D 是正 $\triangle P_1P_2P_3$ 及其内部的点构成的集合, 点 P_0 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心. 若集合 $S = \{P \mid P \in D, |PP_0| \leq |PP_i|, i = 1, 2, 3\}$, 则集合 S 表示的平面区域是 ()
 (A) 三角形区域 (B) 四边形区域 (C) 五边形区域 (D) 六边形区域

二、填空题

9. 若 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta > 0$, 则 $\cos \theta =$ _____.
10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $a_5 =$ _____; 前 8 项的和 $S_8 =$ _____. (用数字作答)

11. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ x \leq 4, \\ y \leq 5, \end{cases}$ 则 $s = x + y$ 的最大值为_____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 1, \\ -x, & x > 1. \end{cases}$ 若 $f(x) = 2$, 则 $x =$ _____.

13. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上. 若 $|PF_1| = 4$, 则 $|PF_2| =$ _____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____.

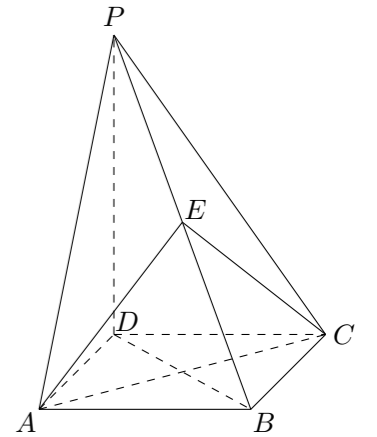
14. 设 A 是整数集的一个非空子集. 对于 $k \in A$, 如果 $k - 1 \notin A$, 那么 k 是 A 的一个“孤立元”. 给定 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 由 S 的 3 个元素构成的所有集合中, 不含“孤立元”的集合共有_____个.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = 2 \sin(\pi - x) \cos x$.
 (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是正方形, $PD \perp ABCD$, 点 E 在棱 PB 上.

- (1) 求证: 平面 $AEC \perp$ 平面 PDB ;
- (2) 当 $PD = \sqrt{2}AB$ 且 E 为 PB 的中点时, 求 AE 与平面 PDB 所成的角的大小.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.

- (1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;
- (2) 这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间至多是 4 min 的概率.

18. 设函数 $f(x) = x^3 - 3ax + b$ ($a \neq 0$).
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(x))$ 处与直线 $y = 8$ 相切, 求 a, b 的值;
 - (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值点.
19. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (1) 求双曲线 C 的方程;
 - (2) 已知直线 $x - y + m = 0$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 且线段 AB 的中点在圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上, 求 m 的值.
20. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$ ($n \in \mathbf{N}^*, P > 0$). 数列 $\{b_m\}$ 定义如下: 对于正整数 m, b_m 是使得不等式 $a_n \geq m$ 成立的所有 n 中的最小值.
- (1) 若 $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$, 求 b_3 ;
 - (2) 若 $p = 2, q = -1$, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 $2m$ 项和公式;
 - (3) 是否存在 p 和 q , 使得 $b_m = 3m + 2$ ($m \in \mathbf{N}^*$)? 如果存在, 求 p 和 q 的取值范围; 如果不存在, 请说明理由.