

2009 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z = i(1 + 2i)$ 对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
2. 已知向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 不共线, $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ($k \in \mathbf{R}$), $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. 如果 $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$, 那么 ()
(A) $k = 1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 同向 (B) $k = 1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 反向
(C) $k = -1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 同向 (D) $k = -1$ 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{d} 反向
3. 为了得到函数 $y = \lg \frac{x+3}{10}$ 的图象, 只需把函数 $y = \lg x$ 的图象上所有的点 ()
(A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
(B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
(C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
(D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度
4. 若正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1, AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角, 则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$
5. “ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)”是“ $\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
6. 若 $(1 + \sqrt{2})^5 = a + b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a + b =$ ()
(A) 45 (B) 55 (C) 70 (D) 80
7. 用 0 到 9 这 10 个数字, 可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为 ()
(A) 324 (B) 328 (C) 360 (D) 648
8. 点 P 在直线 $l: y = x - 1$ 上, 若存在过 P 的直线交抛物线 $y = x^2$ 于 A, B 两点, 且 $|PA| = |AB|$, 则称点 P 为“ \mathcal{A} 点”, 那么下列结论中正确的是 ()
(A) 直线 l 上的所有点都是“ \mathcal{A} 点”
(B) 直线 l 上仅有有限个点是“ \mathcal{A} 点”
(C) 直线 l 上的所有点都不是“ \mathcal{A} 点”
(D) 直线 l 上有无穷多个点 (但不是所有的点) 是“ \mathcal{A} 点”

二、填空题

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x}{x - 1} =$ _____.

10. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 2 \geq 0, \\ x \leq 4, \\ y \leq 5, \end{cases}$ 则 $s = y - x$ 的最小值为_____.

11. 设 $f(x)$ 是偶函数. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 1, 则该曲线在 $(-1, f(-1))$ 处的切线的斜率为_____.

12. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上. 若 $|PF_1| = 4$, 则 $|PF_2| =$ _____; $\angle F_1PF_2$ 的大小为_____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为_____.

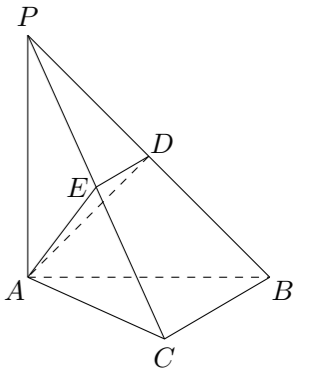
14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{4n-3} = 1, a_{4n-1} = 0, a_{2n} = a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_{2009} =$ _____; $a_{2014} =$ _____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, B = \frac{\pi}{3}, \cos A = \frac{4}{5}, b = \sqrt{3}$.
(1) 求 $\sin C$ 的值;
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABC, PA = AB, \angle ABC = 60^\circ, \angle BCA = 90^\circ$, 点 D, E 分别在棱 PB, PC 上, 且 $DE \parallel BC$.

- (1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAC ;
- (2) 当 D 为 PB 的中点时, 求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小;
- (3) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角? 并说明理由.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\frac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.

- (1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;
- (2) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的分布列及期望.

18. 设函数 $f(x) = xe^{kx}$ ($k \neq 0$).

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

19. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 设直线 l 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上动点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 y_0 \neq 0$) 处的切线, l 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

20. 已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2$) 具有性质 P : 对任意的 i, j ($1 \leq i \leq j \leq n$), $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

- (1) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;
- (2) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;
- (3) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.