

2009 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

一、选择题

1. 设集合 $S = \{x \mid |x| < 5\}$, $T = \{x \mid x^2 + 4x - 21 < 0\}$, 则 $S \cap T =$ ()
 (A) $\{x \mid -7 < x < -5\}$ (B) $\{x \mid 3 < x < 5\}$
 (C) $\{x \mid -5 < x < 3\}$ (D) $\{x \mid -7 < x < 5\}$

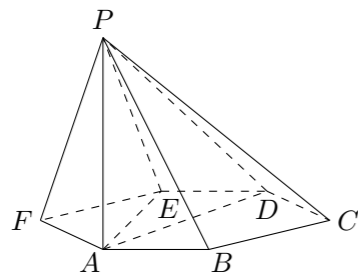
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + \log_2 x & (\text{当 } x \geq 2 \text{ 时}) \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & (\text{当 } x < 2 \text{ 时}) \end{cases}$ 在点 $x = 2$ 处连续, 则常数 a 的值是 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 复数 $\frac{(1+2i)^2}{3-4i}$ 的值是 ()
 (A) -1 (B) 1 (C) -i (D) i

4. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 下面结论错误的是 ()
 (A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 (B) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
 (C) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 0$ 对称
 (D) 函数 $f(x)$ 是奇函数

5. 如图, 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 2AB$, 则下列结论正确的是 ()

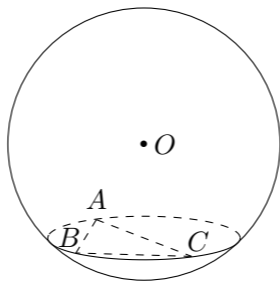


- (A) $PB \perp AD$
 (B) 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC
 (C) 直线 $BC \parallel$ 平面 PAE
 (D) 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°

6. 已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c > d$. 则“ $a > b$ ”是“ $a - c > b - d$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其一条渐近线方程为 $y = x$, 点 $P(\sqrt{3}, y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$ ()
 (A) -12 (B) -2 (C) 0 (D) 4

8. 如图, 在半径为 3 的球面上有 A, B, C 三点, $\angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B, C 两点的球面距离是 ()



- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) π (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) 2π

9. 已知直线 $l_1: 4x - 3y + 6 = 0$ 和直线 $l_2: x = -1$, 抛物线 $y^2 = 4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{11}{5}$ (D) $\frac{37}{16}$

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、 B 原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、 B 原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨, B 原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 ()

- (A) 12 万元 (B) 20 万元 (C) 25 万元 (D) 27 万元

11. 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 ()

- (A) 360 (B) 188 (C) 216 (D) 96

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbf{R} 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1) = (1+x)f(x)$, 则 $f\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 的值是 ()

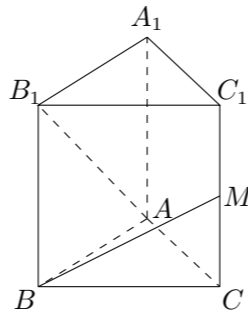
- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{2}$

二、填空题

13. $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式的常数项是_____. (用数字作答)

14. 若 $\odot O_1: x^2 + y^2 = 5$ 与 $\odot O_2: (x-m)^2 + y^2 = 20$ ($m \in \mathbf{R}$) 相交于 A, B 两点, 且两圆在点 A 处的切线互相垂直, 则线段 AB 的长度是_____.

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是_____.



16. 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合. 对于映射 $f: V \rightarrow V$, $\mathbf{a} \in V$, 记 \mathbf{a} 的象为 $f(\mathbf{a})$. 若映射 $f: V \rightarrow V$ 满足: 对所有 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ 及任意实数 λ, μ 都有 $f(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b})$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换. 现有下列命题:

- ① 设 f 是平面 M 上的线性变换, 则 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
 ② 对 $\mathbf{a} \in V$, 设 $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;
 ③ 若 \mathbf{e} 是平面 M 上的单位向量, 对 $\mathbf{a} \in V$, 设 $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \mathbf{e}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;
 ④ 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, 若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线, 则 $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})$ 也共线.

其中真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

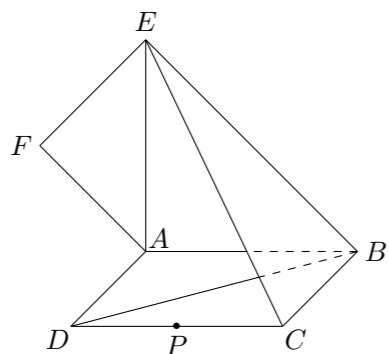
三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 为锐角, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2A = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$.
 (1) 求 $A + B$ 的值;
 (2) 若 $a - b = \sqrt{2} - 1$, 求 a, b, c 的值.

18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中 $\frac{3}{4}$ 是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有 $\frac{1}{3}$ 持金卡, 在省内游客中有 $\frac{2}{3}$ 持银卡.

- (1) 在该团中随机采访 3 名游客, 求恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人的概率;
 (2) 在该团的省内游客中随机采访 3 名游客, 设其中持银卡人数为随机变量 ξ , 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB = AE$, $FA = FE$, $\angle AEF = 45^\circ$.
- (1) 求证: $EF \perp$ 平面 BCE ;
 - (2) 设线段 CD 的中点为 P , 在直线 AE 上是否存在一点 M , 使得 $PM \parallel$ 平面 BCE ? 若存在, 请指出点 M 的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由;
 - (3) 求二面角 $F - BD - A$ 的大小.



21. 已知 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 函数 $f(x) = \log_a(1 - a^x)$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并判断 $f(x)$ 的单调性;
 - (2) 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{f(n)}}{a^n + a}$;
 - (3) 当 $a = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 设 $h(x) = (1 - e^{f(x)})(x^2 - m + 1)$. 若函数 $h(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数 $h(x)$ 的极值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的正整数 n , 都有 $a_n = 5S_n + 1$ 成立, 记 $b_n = \frac{4 + a_n}{1 - a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 记 $c_n = b_{2n} - b_{2n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 对任意正整数 n 都有 $T_n < \frac{3}{2}$;
 - (3) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n . 已知正实数 λ 满足: 对任意正整数 n , $R_n \leq \lambda n$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x = 2$.
- (1) 求椭圆的标准方程;
 - (2) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M, N 两点, 且 $|\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线 l 的方程.