2009 普通高等学校招生考试 (大纲卷 II 理)

一、选择题

1. $\dfrac{10\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $-2+4\mathrm{i}$ (B) $-2-4\mathrm{i}$ (C) $2+4\mathrm{i}$ (D) $2-4\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x \mid x>3\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{x-1}{x-4}<0\right\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\varnothing$ (B) $(3,4)$ (C) $(-2,1)$ (D) $(4,+\infty)$

3. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\cot A=-\dfrac{12}{5}$, 则 $\cos A=$ ( )

(A) $\dfrac{12}{13}$ (B) $\dfrac{5}{13}$ (C) $-\dfrac{5}{13}$ (D) $-\dfrac{12}{13}$

4. 曲线 $y=\dfrac{x}{2x-1}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ( )

(A) $x-y-2=0$ (B) $x+y-2=0$
(C) $x+4y-5=0$ (D) $x-4y-5=0$

5. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2AB$, E 为 AA_1 中点, 则异面直线 BE 与 CD_1 所成的角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (D) $\dfrac{3}{5}$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 25

7. 设 $a=\log_3\pi$, $b=\log_2\sqrt{3}$, $c=\log_3\sqrt{2}$, 则 ( )

(A) $a>b>c$ (B) $a>c>b$ (C) $b>a>c$ (D) $b>c>a$

8. 若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 已知直线 $y=k(x+2)$ $(k>0)$ 与抛物线 C: $y^2=8x$ 相交于 A、B 两点, F 为 C 的焦点. 若 $|FA|=2|FB|$, 则 $k=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

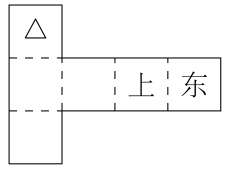
10. 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ( )

(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 30 种 (D) 36 种

11. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A、B 两点, 若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$. 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{6}{5}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\dfrac{5}{8}$ (D) $\dfrac{9}{5}$

12. 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现有沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平, 得到如图的平面图形, 则标“△”的面的方位是 ( )



(A) 南 (B) 北 (C) 西 (D) 下

二、填空题

13. $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为______.

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_5=5a_3$, 则 $\dfrac{S_9}{S_5}=$______.

15. 设 OA 是球 O 的半径, M 是 OA 的中点, 过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C. 若圆 C 的面积等于 $\dfrac{7\pi}{4}$, 则球 O 的表面积等于______.

16. 已知 AC、BD 为圆 O: $x^2+y^2=4$ 的两条相互垂直的弦, 垂足为 $M\left(1,\sqrt{2}\right)$, 则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为______.

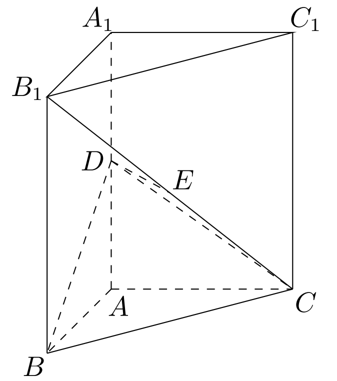
三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边长分别为 a、b、c, $\cos(A-C)+\cos B=\dfrac{3}{2}$, $b^2=ac$, 求 B.

18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp AC$, D、E 分别为 AA_1、B_1C 的中点, $DE\perp$ 平面 BCC_1.

(1) 证明: $AB=AC$;

(2) 设二面角 $A-BD-C$ 为 60°, 求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $S_{n+1}=4a_n+2$.

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 5 名工人, 其中有 3 名女工人. 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核.
(1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;
(2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;
(3) 记 ξ 表示抽取的 3 名工人中男工人数, 求 ξ 的分布列及数学期望.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) C 上是否存在点 P, 使得当 l 绕 F 转到某一位置时, 有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立? 若存在, 求出所有的 P 的坐标与 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

22. 设函数 $f(x)=x^2+a\ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$.
(1) 求 a 的取值范围, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 证明: $f(x_2)>\dfrac{1-2\ln 2}{4}$.