2009 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\frac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $-1-2\mathrm{i}$ (C) $1-2\mathrm{i}$ (D) $-1+2\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geqslant 3, \\ x-y \geqslant -1, \\ 2x-y \leqslant 3, \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值为 ( )

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 23

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“$x=1$”是“$x^3=x$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

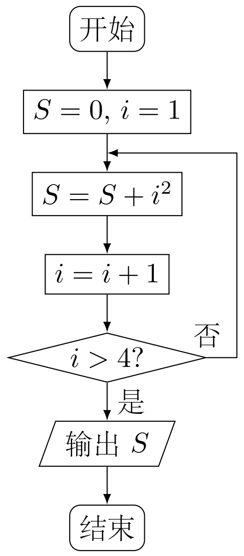
4. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的虚轴长为 2, 焦距为 $2\sqrt{3}$, 则双曲线的渐近线方程为 ( )

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$ (B) $y=\pm 2x$ (C) $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y=\pm\frac{1}{2}x$

5. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$, $b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$, $c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<c<a$ (D) $b<a<c$

6. 阅读如图的程序框图, 则输出的 $S=$ ( )



(A) 14 (B) 20 (C) 30 (D) 55

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)\ (x \in \mathbf{R},\ \omega>0)$ 的最小正周期为 π. 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的一个值是 ( )

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & x \geqslant 0, \\ x+6, & x<0, \end{cases}$ 则不等式 $f(x)>f(1)$ 的解集是( )

(A) $(-3,1)\cup(3,+\infty)$ (B) $(-3,1)\cup(2,+\infty)$

(C) $(-1,1)\cup(3,+\infty)$ (D) $(-\infty,-3)\cup(1,3)$

9. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, $a>1$, $b>1$. 若 $a^x=b^y=3$, $a+b=2\sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为 ( )

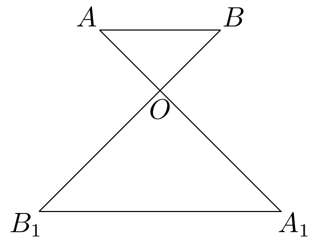
(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$, 且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$. 下面的不等式在 $\mathbf{R}$ 内恒成立的是 ( )

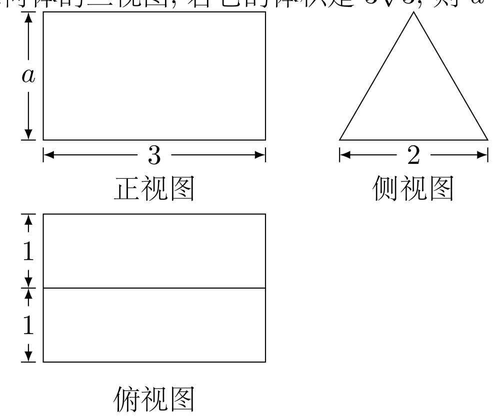
(A) $f(x)>0$ (B) $f(x)<0$ (C) $f(x)>x$ (D) $f(x)<x$

二、填空题

11. 如图, AA_1 与 BB_1 相交于点 O, $AB \parallel A_1B_1$ 且 $AB=\frac{1}{2}A_1B_1$, 若 $\triangle AOB$ 得外接圆直径为 1, 则 $\triangle A_1OB_1$ 的外接圆直径为______.



12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是 $3\sqrt{3}$, 则 $a=$______.



13. 设全集 $U=A\cup B=\{x \in \mathbf{N}^* \mid \lg x<1\}$, 若 $A \cap (\complement_U B)=\{m \mid m=2n+1,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, 则集合 $B=$______.

14. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0\ (a>0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$______.

15. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, 则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$______.

16. 若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2<ax^2$ 的解集中的整数恰好有 3 个, 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$, $\sin C=2\sin A$.

(1) 求 AB 的值;

(2) 求 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 为了了解某工厂开展群众体育活动的情况, 拟采用分层抽样的方法从 A, B, C 三个区中抽取 7 个工厂进行调查, 已知 A, B, C 区中分别有 18, 27, 18 个工厂.

(1) 求从 A, B, C 区中分别抽取的工厂个数;

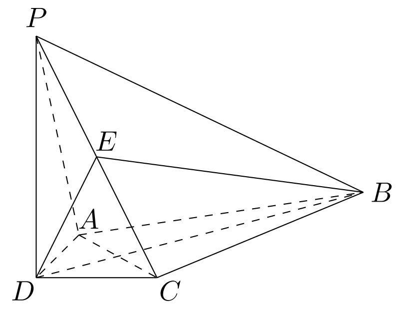
(2) 若从抽取的 7 个工厂中随机抽取 2 个进行调查结果的对比, 用列举法计算这 2 个工厂中至少有 1 个来自 A 区的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\perp CD$, 且 DB 平分 $\angle ADC$, E 为 PC 的中点, $AD=CD=1$, $DB=2\sqrt{2}$.

(1) 证明 $PA\parallel$ 平面 BDE;

(2) 证明 $AC\perp$ 平面 PBD;

(3) 求直线 BC 与平面 PBD 所成的角的正切值.



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, 设 $S_n=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$, $T_n=a_1-a_2q+\cdots+(-1)^{n-1}a_nq^{n-1}$, $q\neq 0$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $q=1$, $a_1=1$, $S_3=15$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1=d$, S_1, S_2, S_3 成等比数列, 求 q 的值.

(3) 若 $q\neq\pm1$, 证明 $(1-q)S_{2n}-(1+q)T_{2n}=\dfrac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

21. 设函数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+(m^2-1)x\ (x\in\mathbf{R})$, 其中 $m>0$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率;

(2) 求函数的单调区间与极值;

(3) 已知函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 0, x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$. 若对任意的 $x\in[x_1,x_2]$, $f(x)>f(1)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

22. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$ $(c>0)$, 过点 $E\left(\dfrac{a^2}{c},0\right)$ 的直线与椭圆相交与 A, B 两点, 且 $F_1A\parallel F_2B$, $|F_1A|=2|F_2B|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 求直线 AB 的斜率;

(3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线 F_2B 上有一点 $H(m,n)$ $(m\neq0)$ 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上, 求 $\dfrac{n}{m}$ 的值.