2009 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $-1-2\mathrm{i}$ (C) $1-2\mathrm{i}$ (D) $-1+2\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 3, \\ x-y\geqslant -1, \\ 2x-y\leqslant 3, \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值为 ( )

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 23

3. 命题"存在 $x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}\leqslant 0$"的否定是 ( )

(A) 不存在 $x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}>0$ (B) 存在 $x_0\in\mathbf{R}$, $2^{x_0}\geqslant 0$

(C) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $2^{x}\leqslant 0$ (D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $2^{x}>0$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x-\ln x\ (x>0)$, 则 $y=f(x)$ ( )

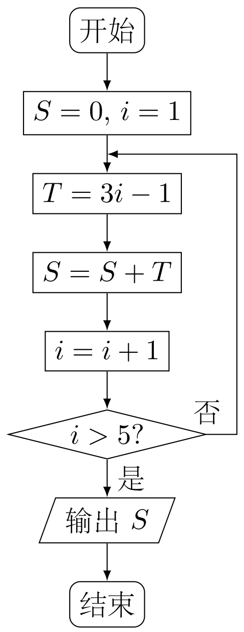
(A) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$, $(1,\mathrm{e})$ 内均有零点

(B) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$, $(1,\mathrm{e})$ 内均无零点

(C) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内有零点, 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内无零点

(D) 在区间 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 内无零点, 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内有零点

5. 阅读如图的程序框图, 则输出的 $S=$ ( )



(A) 26 (B) 35 (C) 40 (D) 57

6. 设 $a>0, b>0$. 若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 与 3^b 的等比中项, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为( )

(A) 8 (B) 4 (C) 1 (D) $\dfrac{1}{4}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0)$ 的最小正周期为 π. 为了得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象, 只要将 $y=f(x)$ 的图象 ( )

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度 (B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度 (D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x, & x\geqslant 0, \\ 4x-x^2, & x<0. \end{cases}$ 若 $f(2-a^2)>f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ (B) $(-1,2)$

(C) $(-2,1)$ (D) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

9. 设抛物线 $y^2=2x$ 的焦点为 F, 过点 $M(\sqrt{3},0)$ 的直线与抛物线相交于 A, B 两点, 与抛物线的准线相交于 C, $|BF|=2$, 则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比 $\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=$ ( )

(A) $\dfrac{4}{5}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{4}{7}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

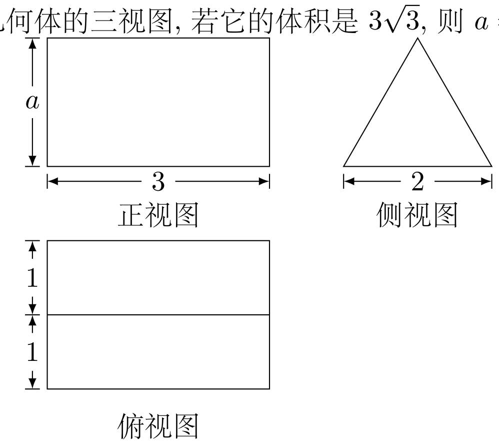
10. $0<b<1+a$. 若关于 x 的不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个, 则 ( )

(A) $-1<a<0$ (B) $0<a<1$ (C) $1<a<3$ (D) $3<a<6$

二、填空题

11. 某学院的 A, B, C 三个专业共有 1200 名学生. 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生, B 专业有 420 名学生, 则在该学院的 C 专业应抽取______名学生.

12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是 $3\sqrt{3}$, 则 $a=$______.



13. 设直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=1+3t, \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的方程为 $y=3x+4$, 则 l_1 与 l_2 的距离为______.

14. 若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0\ (a>0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a=$______.

15. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,1)$, $\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}\overrightarrow{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|}\overrightarrow{BD}$, 则四边形 $ABCD$ 的面积为______.

16. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 组成没有重复数字的四位数, 其中个位、十位和百位上的数字之和为偶数的四位数共有______个. (用数字作答)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=\sqrt{5}$, $AC=3$, $\sin C=2\sin A$.

(1) 求 AB 的值;

(2) 求 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

18. 在 10 件产品中, 有 3 件一等品, 4 件二等品, 3 件三等品. 从这 10 件产品中任取 3 件, 求:

(1) 取出的 3 件产品中一等品件数 X 的分布列和数学期望;

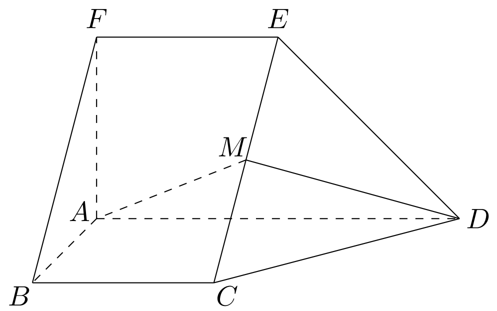
(2) 取出的 3 件产品中一等品件数多于二等品件数的概率.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, $FA\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\parallel BC\parallel FE$, $AB\perp AD$, M 为 EC 的中点, $AF=AB=BC=FE=\dfrac{1}{2}AD$.

(1) 求异面直线 BF 与 DE 所成的角的大小;

(2) 证明平面 $AMD\perp$ 平面 CDE;

(3) 求二面角 $A-CD-E$ 的余弦值.



20. 已知函数 $f(x)=(x^2+ax-2a^2+3a)\mathrm{e}^x\ (x\in\mathbf{R})$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率;

(2) 当 $a\neq\dfrac{2}{3}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$ $(c>0)$, 过点 $E\left(\dfrac{a^2}{c},0\right)$ 的直线与椭圆相交与 A, B 两点, 且 $F_1A\parallel F_2B$, $|F_1A|=2|F_2B|$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 求直线 AB 的斜率;

(3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线 F_2B 上有一点 $H(m,n)$ $(m\neq0)$ 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上, 求 $\dfrac{n}{m}$ 的值.

22. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d\ (d\neq0)$, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q\ (q>1)$. 设 $S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, $T_n=a_1b_1-a_2b_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_nb_n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1=b_1=1$, $d=2$, $q=3$, 求 S_3 的值;

(2) 若 $b_1=1$, 证明 $(1-q)S_{2n}-(1+q)T_{2n}=\dfrac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$, $n\in\mathbf{N}^*$;

(3) 若正整数 n 满足 $2\leqslant n\leqslant q$, 设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 和 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是 1, 2, $\cdots$, n 的两个不同的排列, $c_1=a_{k_1}b_1+a_{k_2}b_2+\cdots+a_{k_n}b_n$, $c_2=a_{l_1}b_1+a_{l_2}b_2+\cdots+a_{l_n}b_n$, 证明 $c_1\neq c_2$.