# 2009 普通高等学校招生考试 (山东卷文)

## 一、选择题

1. 集合 $A=\{0,\ 2,\ a\}$, $B=\{1,\ a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 16\}$, 则 $a$ 的值为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

2. 复数 $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

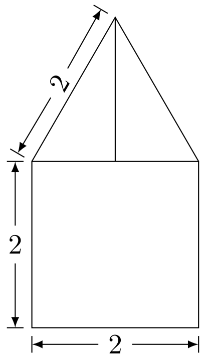
(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $2+\mathrm{i}$ (D) $2-\mathrm{i}$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 所得图象的函数解析式是 ( )

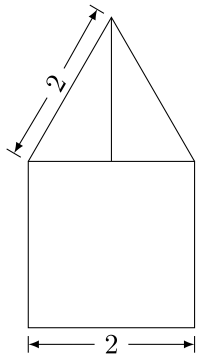
(A) $y=\cos 2x$ (B) $y=2\cos^2 x$

(C) $y=1+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (D) $y=2\sin^2 x$

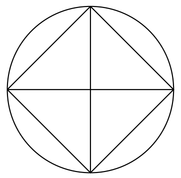
4. 一空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )




正 (主) 视图




侧 (左) 视图



俯视图

(A) $2\pi+2\sqrt{3}$ (B) $4\pi+2\sqrt{3}$ (C) $2\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $4\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

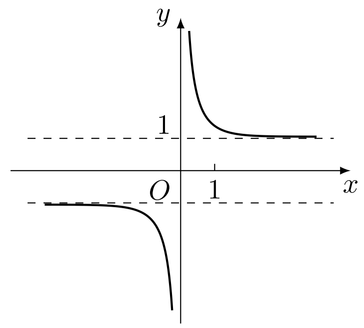
5. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\odot$: $a\odot b=ab+2a+b$, 则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 $x$ 的取值范围为 ( ).

(A) $(0,2)$ (B) $(-2,1)$

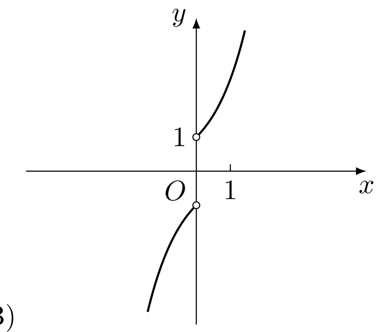
(C) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ (D) $(-1,2)$

6. 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的图象大致为 ( )

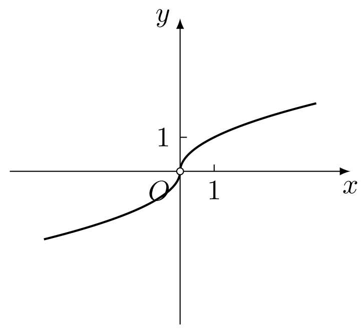
(A)



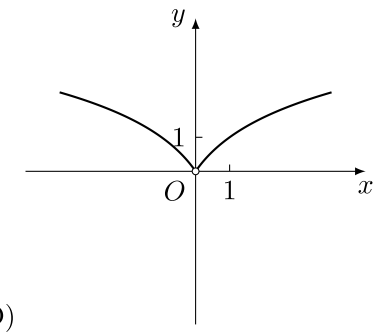

(B)




(C)




(D)




7. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(4-x), & x\leqslant 0,\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0,\end{cases}$ 则 $f(3)$ 的值为 ( )

(A) $-1$ (B) $-2$ (C) 1 (D) 2

8. 设 $P$ 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则 ( )

(A) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$ (B) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

(C) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$ (D) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

9. 已知 $\alpha$, $\beta$ 表示两个不同的平面, $m$ 为平面 $\alpha$ 内的一条直线, 则"$\alpha\perp\beta$"是"$m\perp\beta$"的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 设斜率为 2 的直线 $l$ 过抛物线 $y^2=ax$ $(a\neq 0)$ 的焦点 $F$, 且和 $y$ 轴交于点 $A$. 若 $\triangle OAF$ ($O$ 为坐标原点) 的面积为 4, 则抛物线方程为 ( )

(A) $y^2=\pm 4x$ (B) $y^2=\pm 8x$ (C) $y^2=4x$ (D) $y^2=8x$

11. 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上随机取一个数 $x$, $\cos x$ 的值介于 0 到 $\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{2}{\pi}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$, 且在区间 $[0,2]$ 上是增函数, 则 ( )

(A) $f(-25)<f(11)<f(80)$ (B) $f(80)<f(11)<f(-25)$

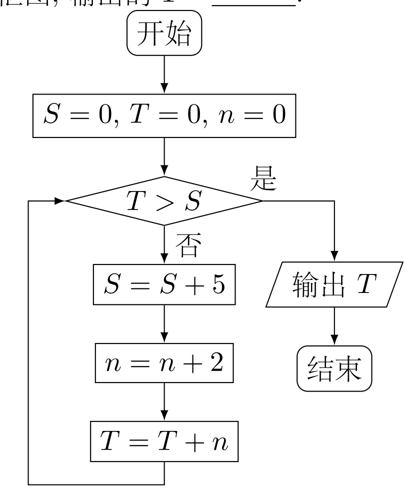
(C) $f(11)<f(80)<f(-25)$ (D) $f(-25)<f(80)<f(11)$

## 二、填空题

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3=7$, $a_5=a_2+6$, 则 $a_6=$______.

14. 若函数 $f(x)=a^x-x-a$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点, 则实数 $a$ 的取值范围是______.

15. 执行如图的程序框图, 输出的 $T=$______.




16. 某公司租赁甲、乙两种设备生产 $A$, $B$ 两类产品, 甲种设备每天能生产 $A$ 类产品 5 件和 $B$ 类产品 10 件, 乙种设备每天能生产 $A$ 类产品 6 件和 $B$ 类产品 20 件. 已知设备甲每天的租赁费为 200 元, 设备乙每天的租赁费为 300 元. 现该公司至少要生产 $A$ 类产品 50 件, $B$ 类产品 140 件, 所需租赁费最少为______元.

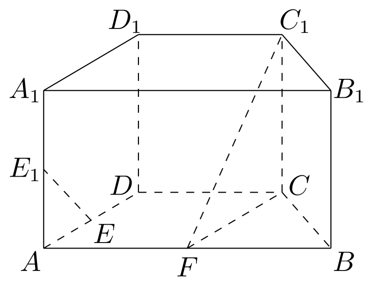
## 三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x$ $(0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\pi$ 处取最小值.

(1) 求 $\varphi$ 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $a$, $b$, $c$ 分别是角 $A$, $B$, $C$ 的对边. 已知 $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $f(A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 求角 $C$.

18. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB /\!/ CD$, $AB=4$, $BC=CD=2$, $AA_1=2$, $E$、$E_1$ 分别是棱 $AD$、$AA_1$ 的中点.
(1) 设 $F$ 是棱 $AB$ 的中点, 证明: 直线 $EE_1 /\!/$ 平面 $FCC_1$;
(2) 证明: 平面 $D_1AC \perp$ 平面 $BB_1C_1C$.




19. 一汽车厂生产 $A, B, C$ 三类轿车, 每类轿车均有舒适型和标准型两种型号, 某月的产量如下表 (单位: 辆) :

| | 轿车 $A$ | 轿车 $B$ | 轿车 $C$ |
|---|---|---|---|
| 舒适型 | 100 | 150 | $z$ |
| 标准型 | 300 | 450 | 600 |

按类型分层抽样的方法在这个月生产的轿车中抽取 50 辆, 其中有 $A$ 类轿车 10 辆.
(1) 求 $z$ 的值;
(2) 用分层抽样的方法在 $C$ 类轿车中抽取一个容量为 5 的样本. 将该样本看成一个总体, 从中任取 2 辆, 求至少有 1 辆舒适型轿车的概率;
(3) 用随机抽样的方法从 $B$ 类舒适型轿车中抽取 8 辆, 经检测它们的得分如下: 9.4, 8.6, 9.2, 9.6, 8.7, 9.3, 9.0, 8.2. 把这 8 辆轿车的得分看作一个总体, 从中任取一个数, 求该数与样本平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率.

20. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$. 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ , 点 $(n, S_n)$ 均在函数 $y=b^x+r$ ($b>0$ 且 $b \neq 1$, $b, r$ 均为常数) 的图象上.
(1) 求 $r$ 的值;
(2) 当 $b=2$ 时, 记 $b_n=\dfrac{n+1}{4a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+x+3$, 其中 $a \neq 0$.
(1) 当 $a, b$ 满足什么条件时, $f(x)$ 取得极值?
(2) 已知 $a>0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增, 试用 $a$ 表示出 $b$ 的取值范围.

22. 设 $m \in \mathbf{R}$, 在平面直角坐标系中, 已知向量 $\boldsymbol{a}=(mx, y+1)$, 向量 $\boldsymbol{b}=(x, y-1)$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 动点 $M(x, y)$ 的轨迹为 $E$.
(1) 求轨迹 $E$ 的方程, 并说明该方程所表示曲线的形状;
(2) 已知 $m=\dfrac{1}{4}$. 证明: 存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与轨迹 $E$ 恒有两个交点 $A, B$, 且 $OA \perp OB$ ($O$ 为坐标原点), 并求出该圆的方程;
(3) 已知 $m=\dfrac{1}{4}$. 设直线 $l$ 与圆 $C$: $x^2+y^2=R^2$ ($1<R<2$) 相切于 $A_1$, 且 $l$ 与轨迹 $E$ 只有一个公共点 $B_1$. 当 $R$ 为何值时, $|A_1B_1|$ 取得最大值? 并求最大值.