2009 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 集合 $A=\{0,\ 2,\ a\}$, $B=\{1,\ a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 16\}$, 则 a 的值为 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

2. 复数 $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

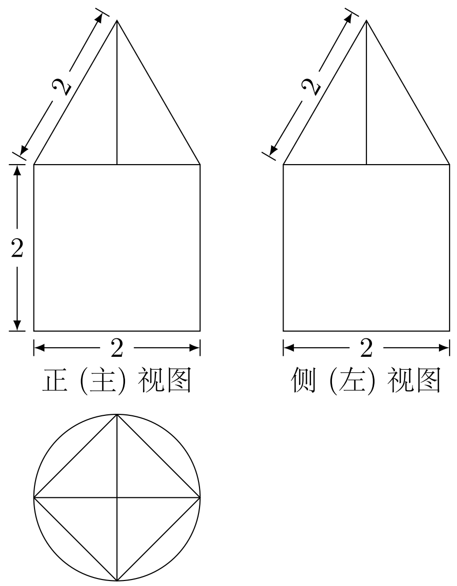
(A) $1+2\mathrm{i}$　　(B) $1-2\mathrm{i}$　　(C) $2+\mathrm{i}$　　(D) $2-\mathrm{i}$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 所得图象的函数解析式是 ( )

(A) $y=\cos 2x$　　(B) $y=2\cos^2 x$

(C) $y=1+\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(D) $y=2\sin^2 x$

4. 一空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



正 (主) 视图　　侧 (左) 视图

俯视图

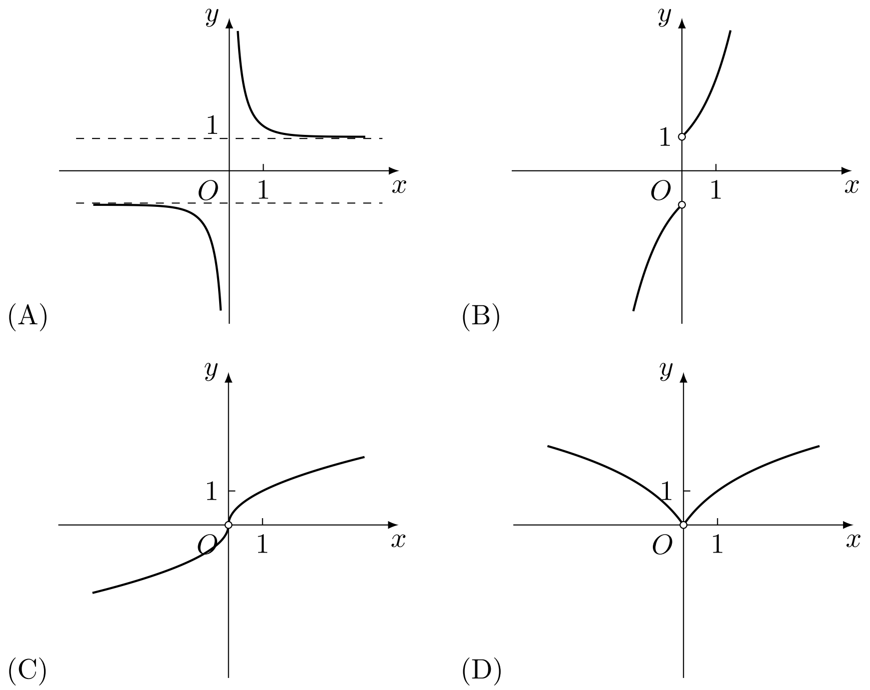
(A) $2\pi+2\sqrt{3}$　　(B) $4\pi+2\sqrt{3}$　　(C) $2\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $4\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5. 已知 α, β 表示两个不同的平面, m 为平面 α 内的一条直线, 则“$\alpha\perp\beta$”是“$m\perp\beta$”的 ( )

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$ 的图象大致为 ( )

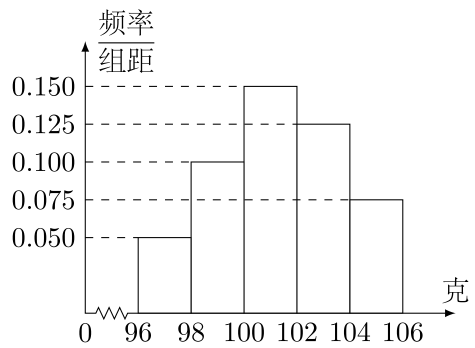


7. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 则 ( )

(A) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\mathbf{0}$　　(B) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$

(C) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$　　(D) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$

8. 某工厂对一批产品进行了抽样检测. 如图是根据抽样检测后的产品净重 (单位: 克) 数据绘制的频率分布直方图, 其中产品净重的范围是 $[96,106]$, 样本数据分组为 $[96,98)$, $[98,100)$, $[100,102)$, $[102,104)$, $[104,106]$, 已知样本中产品净重小于 100 克的个数是 36, 则样本中净重大于或等于 98 克并且小于 104 克的产品的个数是 ( )



(A) 90　　(B) 75　　(C) 60　　(D) 45

9. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 只有一个公共点, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{5}{4}$　　(B) 5　　(C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\sqrt{5}$

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x), & x\leqslant 0,\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0,\end{cases}$ 则 $f(2009)$ 的值为 ( )

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

11. 在区间 $[-1,1]$ 上随机取一个数 x, $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的值介于 0 到 $\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{2}{\pi}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

12. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-6\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\end{cases}$. 若目标函数 $z=ax+by$ $(a>0, b>0)$ 的是最大值为 12, 则 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}$ 的最小值为 ( )

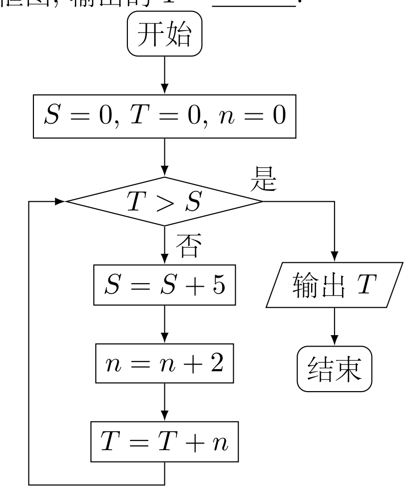
(A) $\dfrac{25}{6}$　　(B) $\dfrac{8}{3}$　　(C) $\dfrac{11}{3}$　　(D) 4

二、填空题

13. 不等式 $|2x-1|-|x-2|<0$ 的解集为______.

14. 若函数 $f(x)=a^x-x-a$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 有两个零点, 则实数 a 的取值范围是______.

15. 执行如图的程序框图, 输出的 $T=$______.



16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 满足 $f(x-4)=-f(x)$, 且在区间 $[0,2]$ 上是增函数, 若方程 $f(x)=m$ $(m>0)$ 在区间 $[-8,8]$ 上有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4, 则 $x_1+x_2+x_3+x_4=$______.

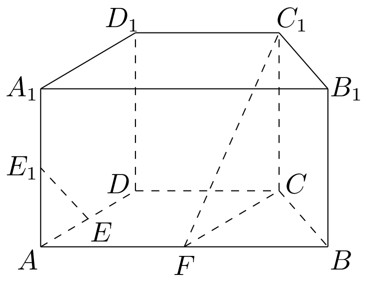
三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期;

(2) 设 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的三个内角, 若 $\cos B=\dfrac{1}{3}$, $f\left(\dfrac{C}{3}\right)=-\dfrac{1}{4}$, 且 C 为锐角, 求 $\sin A$.

18. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB=4$, $BC=CD=2$, $AA_1=2$, E、E_1、F 分别是棱 AD、AA_1、AB 的中点.
(1) 证明: 直线 $EE_1 \parallel$ 平面 FCC_1;
(2) 求二面角 $B-FC_1-C$ 的余弦值.



19. 在某校组织的一次篮球定点投篮训练中, 规定每人最多投 3 次; 在 A 处每投进一球得 3 分, 在 B 处每投进一球得 2 分; 如果前两次得分之和超过 3 分即停止投篮, 否则投第三次, 某同学在 A 处的命中率 q_1 为 0.25, 在 B 处的命中率为 q_2, 该同学选择先在 A 处投一球, 以后都在 B 处投, 用 ξ 表示该同学投篮训练结束后所得的总分, 其分布列为

ξ	0	2	3	4	5
p	0.03	p_1	p_2	p_3	p_4

(1) 求 q_2 的值;
(2) 求随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$;
(3) 试比较该同学选择都在 B 处投篮得分超过 3 分与选择上述方式投篮得分超过 3 分的概率的大小.

20. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 点 (n, S_n) 均在函数 $y=b^x+r$ ($b>0$ 且 $b \neq 1$, b, r 均为常数) 的图象上.
(1) 求 r 的值;
(2) 当 $b=2$ 时, 记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 证明: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $\dfrac{b_1+1}{b_1} \cdot \dfrac{b_2+1}{b_2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{b_n+1}{b_n} > \sqrt{n+1}$ 成立.

21. 两县城 A 和 B 相距 20 km, 现计划在两县城外以 AB 为直径的半圆弧 $\widehat{AB}$ 上选择一点 C 建造垃圾处理厂, 其对城市的影响度与所选地点到城市的的距离有关, 对城 A 和城 B 的总影响度为城 A 与城 B 的影响度之和. 记 C 点到城 A 的距离为 $x$km, 建在 C 处的垃圾处理厂对城 A 和城 B 的总影响度为 y. 统计调查表明: 垃圾处理厂对城 A 的影响度与所选地点到城 A 的距离的平方成反比, 比例系数为 4; 对城 B 的影响度与所选地点到城 B 的距离的平方成反比, 比例系数为 k, 当垃圾处理厂建在 $\widehat{AB}$ 的中点时, 对城 A 和城 B 的总影响度为 0.065.
(1) 将 y 表示成 x 的函数;
(2) 讨论 (1) 中函数的单调性, 并判断弧 $\widehat{AB}$ 上是否存在一点, 使建在此处的垃圾处理厂对城 A 和城 B 的总影响度最小? 若存在, 求出该点到城 A 的距离; 若不存在, 说明理由.

22. 设椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a, $b>0$) 过 $M(2,\sqrt{2})$, $N(\sqrt{6},1)$ 两点, O 为坐标原点.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A, B, 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$? 若存在, 写出该圆的方程, 并求 $|AB|$ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.