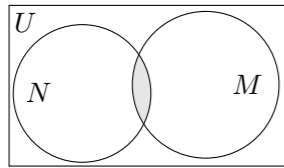


# 2009 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

## 一、选择题

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $M = \{x | -2 \leq x-1 \leq 2\}$  和  $N = \{x | x = 2k-1, k = 1, 2, \dots\}$  的关系的韦恩 (Venn) 图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有 ( )



- (A) 3 个 (B) 2 个 (C) 1 个 (D) 无穷个
2. 设  $z$  是复数,  $\alpha(z)$  表示满足  $z^n = 1$  的最小正整数  $n$ , 则对虚数单位  $i$ ,  $\alpha(i) =$  ( )
- (A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2
3. 若函数  $y = f(x)$  是函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的反函数, 其图象经过点  $(\sqrt{a}, a)$ , 则  $f(x) =$  ( )
- (A)  $\log_2 x$  (B)  $\log_{\frac{1}{2}} x$  (C)  $\frac{1}{2^x}$  (D)  $x^2$
4. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且  $a_5 \cdot a_{2n-5} = 2^{2n} (n \geq 3)$ , 则当  $n \geq 1$  时,  $\log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1} =$  ( )
- (A)  $n(2n-1)$  (B)  $(n+1)^2$  (C)  $n^2$  (D)  $(n-1)^2$

## 5. 给定下列四个命题:

- ① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;  
 ② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;  
 ③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;  
 ④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

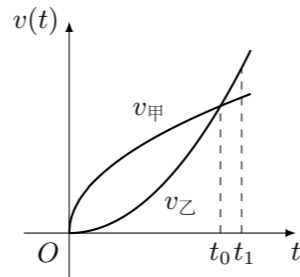
其中, 为真命题的是 ( )

- (A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ②和④
6. 一质点受到平面上的三个力  $F_1, F_2, F_3$  (单位: 牛顿) 的作用而处于平衡状态. 已知  $F_1, F_2$  成  $60^\circ$  角, 且  $F_1, F_2$  的大小分别为 2 和 4, 则  $F_3$  的大小为 ( )
- (A) 6 (B) 2 (C)  $2\sqrt{5}$  (D)  $2\sqrt{7}$

7. 2010 年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作, 若其中小张和小赵只能从事前两项工作, 其余三人均能从事这四项工作, 则不同的选派方案共有 ( )

- (A) 36 种 (B) 12 种 (C) 18 种 (D) 48 种

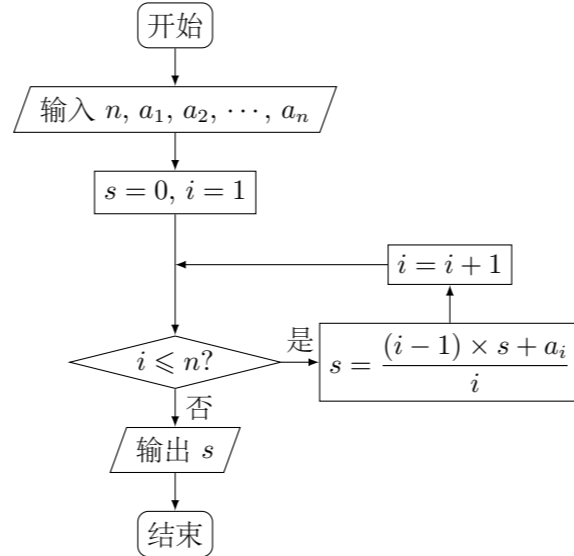
8. 已知甲、乙两车由同一起点同时出发, 并沿同一路线 (假定为直线) 行驶. 甲车、乙车的速度曲线分别为  $v_{甲}$  和  $v_{乙}$  (如图所示). 那么对于图中给定的  $t_0$  和  $t_1$ , 下列判断中一定正确的是 ( )



- (A) 在  $t_1$  时刻, 甲车在乙车前面 (B)  $t_1$  时刻后, 甲车在乙车后面  
 (C) 在  $t_0$  时刻, 两车的位置相同 (D)  $t_0$  时刻后, 乙车在甲车前面

## 二、填空题

9. 随机抽取某产品  $n$  件, 测得其长度分别为  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 则如图所示的程序框图输出的  $s =$  \_\_\_\_\_,  $s$  表示的样本的数字特征是\_\_\_\_\_. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“:=”)



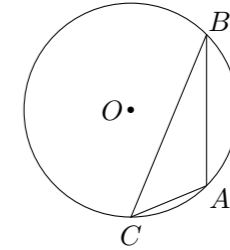
10. 若平面向量  $a, b$  满足  $|a+b| = 1, a+b$  平行于  $x$  轴,  $b = (2, -1)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
11. 已知椭圆  $G$  的中心在坐标原点, 长轴在  $x$  轴上, 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且  $G$  上一点到  $G$  的两个焦点的距离之和为 12, 则椭圆  $G$  的方程为\_\_\_\_\_.
12. 已知离散型随机变量  $X$  的分布列如下表. 若  $EX = 0, DX = 1$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

$X$	-1	0	1	2
$P$	$a$	$b$	$c$	$\frac{1}{12}$

13. 若直线  $l_1: \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + kt, \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与直线  $l_2: \begin{cases} x = s, \\ y = 1 - 2s, \end{cases}$  ( $s$  为参数) 垂直, 则  $k =$ \_\_\_\_\_.

14. 不等式  $\frac{|x+1|}{|x+2|} \geq 1$  的实数解为\_\_\_\_\_.

15. 如图, 点  $A, B, C$  是圆  $O$  上的点, 且  $AB = 4, \angle ACB = 45^\circ$ , 则圆  $O$  的面积等于\_\_\_\_\_.



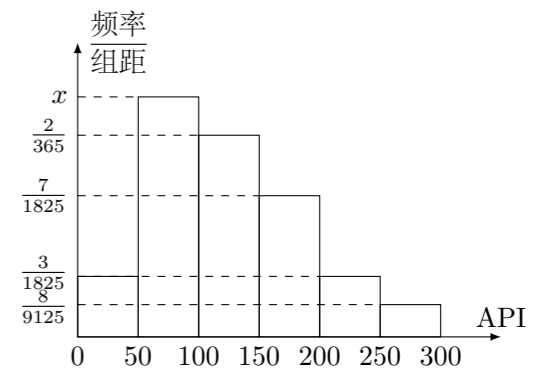
## 三、解答题

16. 已知向量  $a = (\sin \theta, -2)$  与  $b = (1, \cos \theta)$  互相垂直, 其中  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ .
- (1) 求  $\sin \theta \cos \theta$  的值;  
 (2) 若  $\sin(\theta - \varphi) = \frac{\sqrt{10}}{10}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\cos \varphi$  的值.

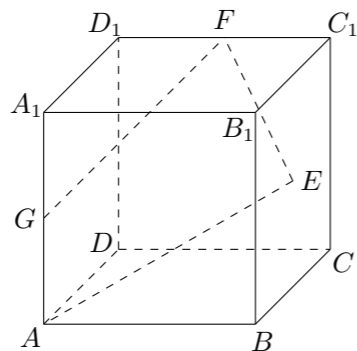
17. 根据空气质量指数 API (为整数) 的不同, 可将空气质量分级如下表: 对某城市一年 (365 天) 的空气质量进行监测, 获得 API 数据按照区间  $[0, 50], (50, 100], (100, 150], (150, 200], (200, 250], (250, 300]$  进行分组, 得到频率分布直方图如图.

API	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 250	251 ~ 300	> 300
级别	I	II	III <sub>1</sub>	III <sub>2</sub>	IV <sub>1</sub>	IV <sub>2</sub>	V
状况	优	良	轻度污染	轻度污染	中度污染	中重度污染	重度污染

- (1) 求直方图中  $x$  的值;  
 (2) 计算一年中空气质量分别为良和轻度污染的天数;  
 (3) 求该城市某一周至少有 2 天的空气质量为良或轻度污染的概率.  
 (结果用分数表示. 已知  $5^7 = 78125, 2^7 = 128, \frac{3}{1825} + \frac{2}{365} + \frac{7}{1825} + \frac{3}{1825} + \frac{8}{9125} = \frac{123}{9125}, 365 = 73 \times 5$ )



18. 如图, 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 点  $E$  是正方形  $BCC_1B_1$  的中心, 点  $F$ 、 $G$  分别是棱  $C_1D_1$ 、 $AA_1$  的中点. 设点  $E_1$ 、 $G_1$  分别是点  $E$ 、 $G$  在平面  $DCC_1D_1$  内的正投影.
- (1) 求以  $E$  为顶点, 以四边形  $FGAE$  在平面  $DCC_1D_1$  内的正投影为底面边界的棱锥的体积;
- (2) 证明: 直线  $FG_1 \perp FEE_1$ ;
- (3) 求异面直线  $E_1G_1$  与  $EA$  所成角的正弦值.



19. 已知曲线  $C: y = x^2$  与直线  $l: x - y + 2 = 0$  交于两点  $A(x_A, y_A)$  和  $B(x_B, y_B)$ , 且  $x_A < x_B$ . 记曲线  $C$  在点  $A$  和点  $B$  之间那一段  $L$  与线段  $AB$  所围成的平面区域 (含边界) 为  $D$ . 设点  $P(s, t)$  是  $L$  上的任一点, 且点  $P$  与点  $A$  和点  $B$  均不重合.
- (1) 若点  $Q$  是线段  $AB$  的中点, 试求线段  $PQ$  的中点  $M$  的轨迹方程;
- (2) 若曲线  $G: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + a^2 + \frac{51}{25} = 0$  与  $D$  有公共点, 试求  $a$  的最小值.

20. 已知二次函数  $y = g(x)$  的导函数的图象与直线  $y = 2x$  平行, 且  $y = g(x)$  在  $x = -1$  处取得极小值  $m - 1$  ( $m \neq 0$ ). 设  $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ .
- (1) 若曲线  $y = f(x)$  上的点  $P$  到点  $Q(0, 2)$  的距离的最小值为  $\sqrt{2}$ , 求  $m$  的值;
- (2)  $k$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) 如何取值时, 函数  $y = f(x) - kx$  存在零点, 并求出零点.

21. 已知曲线  $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 从点  $P(-1, 0)$  向曲线  $C_n$  引斜率为  $k_n$  ( $k_n > 0$ ) 的切线  $l_n$ , 切点为  $P_n(x_n, y_n)$ .
- (1) 求数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  的通项公式;
- (2) 证明:  $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdots x_{2n-1} < \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} < \sqrt{2} \sin \frac{x_n}{y_n}$ .