2009 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

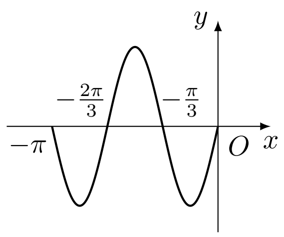
一、填空题

1. 若复数 $z_1=4+29\mathrm{i}$, $z_2=6+9\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 $(z_1-z_2)\mathrm{i}$ 的实部为______.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

3. 函数 $f(x)=x^3-15x^2-33x+6$ 的单调减区间为______.

4. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A,\ \omega,\ \varphi$ 为常数, $A>0,\ \omega>0)$ 在闭区间 $[-\pi,0]$ 上的图象如图所示, 则 $\omega=$______.



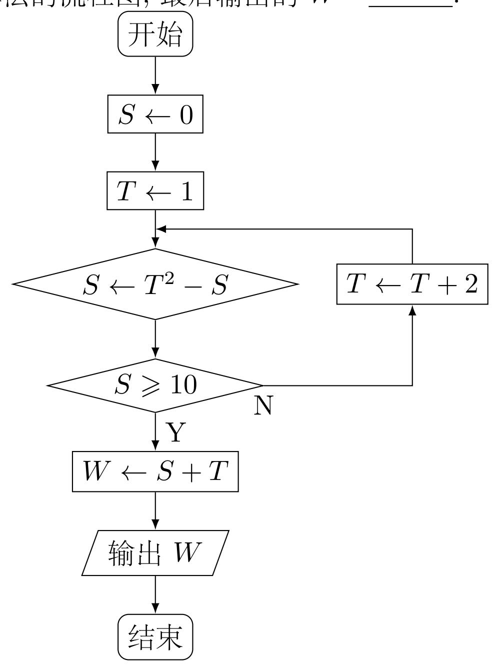
5. 现有 5 根竹竿, 它们的长度 (单位: m) 分别为 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 若从中一次随机抽取 2 根竹竿, 则它们的长度恰好相差 0.3 m 的概率为______.

6. 某校甲、乙两个班级各有 5 名编号为 1, 2, 3, 4, 5 的学生进行投篮练习, 每人投 10 次, 投中的次数如下表:

学生	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9

则以上两组数据的方差中较小的一个为 $s^2=$______.

7. 如图是一个算法的流程图, 最后输出的 $W=$______.



8. 在平面上, 若两个正三角形的边长的比为 1 : 2, 则它们的面积比为 1 : 4, 类似地, 在空间内, 若两个正四面体的棱长的比为 1 : 2, 则它们的体积比为______.

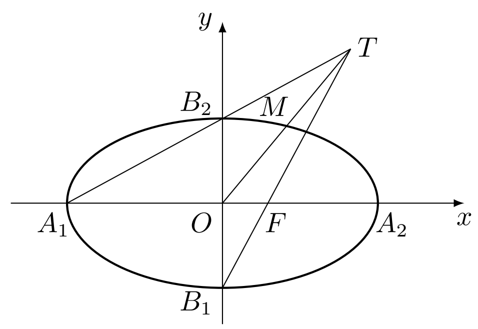
9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 在曲线 C: $y=x^3-10x+3$ 上, 且在第二象限内, 已知曲线 C 在点 P 处的切线的斜率为 2, 则点 P 的坐标为______.

10. 已知 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 函数 $f(x)=a^x$, 若实数 m、n 满足 $f(m)>f(n)$, 则 m、n 的大小关系为______.

11. 已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 2\}$, $B=(-\infty,a)$, 若 $A\subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 $(c,+\infty)$, 其中 $c=$______.

12. 设 α 和 β 为不重合的两个平面, 给出下列命题:
(1) 若 α 内的两条相交直线分别平行于 β 内的两条直线, 则 α 平行于 β;
(2) 若 α 外一条直线 l 与 α 内的一条直线平行, 则 l 和 α 平行;
(3) 设 α 和 β 相交于直线 l, 若 α 内有一条直线垂直于 l, 则 α 和 β 垂直;
(4) 直线 l 与 α 垂直的充分必要条件是 l 与 α 内的两条直线垂直.
上面命题中, 真命题的序号______. (写出所有真命题的序号)

13. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, A_1, A_2, B_1, B_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的四个顶点, F 为其右焦点, 直线 A_1B_2 与直线 B_1F 相交于点 T, 线段 OT 与椭圆的交点 M 恰为线段 OT 的中点, 则该椭圆的离心率为______.

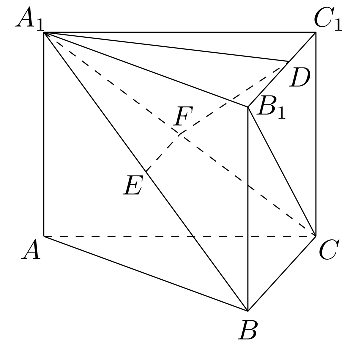


14. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $|q|>1$, 令 $b_n=a_n+1$ $(n=1,2,\cdots)$, 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53,\ -23,\ 19,\ 37,\ 82\}$ 中, 则 $6q=$______.

二、解答题

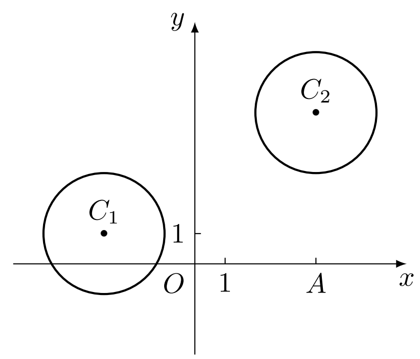
15. 设向量 $\boldsymbol{a}=(4\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\sin\beta,4\cos\beta)$, $\boldsymbol{c}=(\cos\beta,-4\sin\beta)$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ 垂直, 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值;
(2) 求 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ 的最大值;
(3) 若 $\tan\alpha\tan\beta=16$, 求证: $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E、F 分别是 A_1B、A_1C 的中点, 点 D 在 B_1C_1 上, $A_1D\perp B_1C$. 求证:
(1) $EF\parallel$ 平面 ABC;
(2) 平面 $A_1FD\perp$ 平面 BB_1C_1C.



17. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 满足 $a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2$, $S_7=7$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n;
(2) 试求所有的正整数 m, 使得 $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

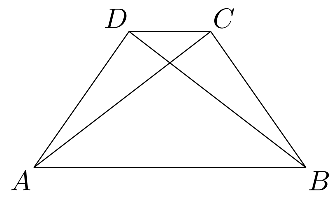
18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C_1: $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ 和圆 C_2: $(x-4)^2+(y-5)^2=4$.
(1) 若直线 l 过点 $A(4,0)$, 且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程;
(2) 设 P 为平面上的点, 满足: 存在过点 P 的无穷多对互相垂直的直线 l_1 和 l_2, 它们分别与圆 C_1 和圆 C_2 相交, 且直线 l_1 被圆 C_1 截得的弦长与直线 l_2 被圆 C_2 截得的弦长相等, 试求所有满足条件的点 P 的坐标.



19. 按照某学者的理论, 假设一个人生产某产品单件成本为 a 元, 如果他卖出该产品的单价为 m 元, 则他的满意度为 $\dfrac{m}{m+a}$; 如果他买进该产品的单价为 n 元, 则他的满意度为 $\dfrac{n}{n+a}$. 如果一个人对两种交易 (卖出或买进) 的满意度分别为 h_1 和 h_2, 则他对这两种交易的综合满意度为 $\sqrt{h_1h_2}$.
现假设甲生产 A、B 两种产品的单件成本分别为 12 元和 5 元, 乙生产 A、B 两种产品的单件成本分别为 3 元和 20 元, 设产品 A、B 的单价分别为 m_A 元和 m_B 元, 甲买进 A 与卖出 B 的综合满意度为 $h_{甲}$, 乙卖出 A 与买进 B 的综合满意度为 $h_{乙}$.
(1) 求 h 和 $h_{乙}$ 关于 m_A、m_B 的表达式; 当 $m_A=\dfrac{3}{5}m_B$ 时, 求证: $h_{甲}=h_{乙}$;
(2) 设 $m_A=\dfrac{3}{5}m_B$, 当 m_A、m_B 分别为多少时, 甲、乙两人的综合满意度均最大? 最大的综合满意度为多少?
(3) 记 (2) 中最大的综合满意度为 h_0, 试问能否适当选取 m_A、m_B 的值, 使得 $h_{甲}\geqslant h_0$ 和 $h_{乙}\geqslant h_0$ 同时成立, 但等号不同时成立? 试说明理由.

20. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.
(1) 若 $f(0)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围;
(2) 求 $f(x)$ 的最小值;
(3) 设函数 $h(x)=f(x)$, $x\in(a,+\infty)$, 直接写出 (不需给出演算步骤) 不等式 $h(x)\geqslant 1$ 的解集.

21. 四选二.
【A】如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC\cong\triangle BAD$. 求证: $AB\,/\!/\,CD$.

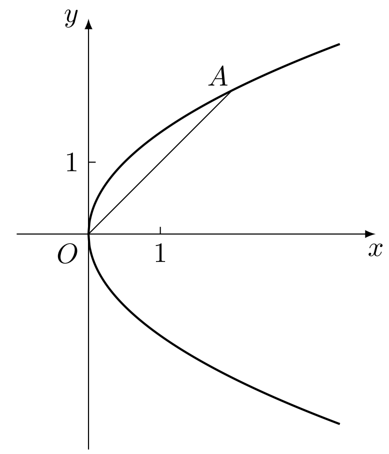


【B】求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2\\2&1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

【C】已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}},\\ y=3(t+\dfrac{1}{t}),\end{cases}$ (t 为参数, $t>0$), 求曲线 C 的普通方程.

【D】设 $a\geqslant b>0$, 求证: $3a^3+2b^3\geqslant 3a^2b+2ab^2$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 C 的顶点在原点, 经过点 $A(2,2)$, 其焦点 F 在 x 轴上.
(1) 求抛物线 C 的标准方程;
(2) 求过点 F, 且与直线 OA 垂直的直线的方程;
(3) 设过点 $M(m,0)$ $(m>0)$ 的直线交抛物线 C 于 D、E 两点, $ME=2DM$, 记 D 和 E 两点间的距离为 $f(m)$, 求 $f(m)$ 关于 m 的表达式.



23. 对于正整数 $n\geqslant 2$, 用 T_n 表示关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根的有序数组 (a,b) 的组数, 其中 $a,b\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ (a 和 b 可以相等); 对于随机选取的 $a,b\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ (a 和 b 可以相等), 记 P_n 为关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根的概率.
(1) 求 T_{n^2} 和 P_{n^2};
(2) 求证: 对任意正整数 $n\geqslant 2$, 有 $P_n>1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.