2009 普通高等学校招生考试 (江西卷文)

一、选择题

1. 下列命题是真命题的为 ( )

(A) 若 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$, 则 $x=y$　(B) 若 $x^2=1$, 则 $x=1$

(C) 若 $x=y$, 则 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$　(D) 若 $x<y$, 则 $x^2<y^2$

2. 函数 $y=\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}}{x}$ 的定义域为 ( )

(A) $[-4,1]$　(B) $[-4,0)$　(C) $(0,1]$　(D) $[-4,0)\cup(0,1]$

3. 50 名学生参加甲、乙两项体育活动, 每人至少参加了一项, 参加甲项的学生有 30 名, 参加乙项的学生有 25 名, 则仅参加了一项活动的学生人数为( )

(A) 50　(B) 45　(C) 40　(D) 35

4. 函数 $f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$ 的最小正周期为 ( )

(A) 2π　(B) $\frac{3\pi}{2}$　(C) π　(D) $\frac{\pi}{2}$

5. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数, 若对于 $x\geqslant 0$, 都有 $f(x+2)=f(x)$, 且当 $x\in[0,2)$ 时, $f(x)=\log_2(x+1)$, 则 $f(-2008)+f(2009)$ 的值为 ( )

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

6. 若 $\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$ 能被 7 整除, 则 x, n 的值可能为 ( )

(A) $x=4$, $n=3$　(B) $x=4$, $n=4$　(C) $x=5$, $n=4$　(D) $x=6$, $n=5$

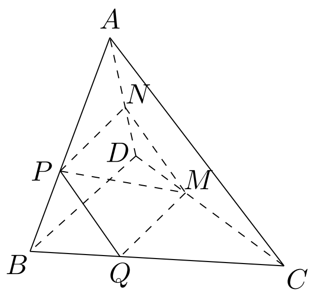
7. 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\,b>0)$ 的两个焦点, 若 F_1, F_2, $P(0,2b)$ 是正三角形的三个顶点, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\frac{3}{2}$　(B) 2　(C) $\frac{5}{2}$　(D) 3

8. 公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 a_4 是 a_3 与 a_7 的等比中项, $S_8=32$, 则 S_{10} 等于

(A) 18　(B) 24　(C) 60　(D) 90

9. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 $PQMN$ 是正方形, 则在下列命题中, 错误的为 ( )



(A) $AC\perp BD$

(B) $AC\,/\!/$ 截面 $PQMN$

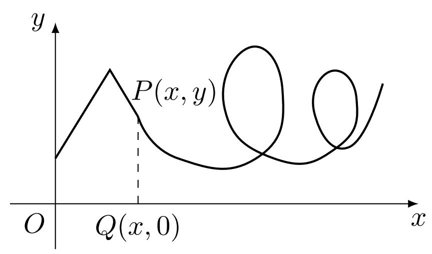
(C) $AC=BD$

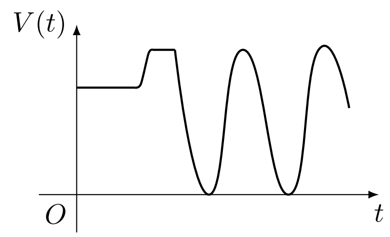
(D) 异面直线 PM 与 BD 所成的角为 $45°$

10. 甲、乙、丙、丁 4 个足球队参加比赛, 假设每场比赛各队取胜的概率相等, 现任意将这 4 个队分成两个组 (每组两个队) 进行比赛, 胜者再赛. 则甲、乙相遇的概率为 ( )

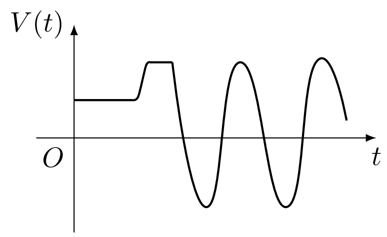
(A) $\frac{1}{6}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{1}{2}$

11. 如图所示, 一质点 $P(x,y)$ 在 xOy 平面上沿曲线运动, 速度大小不变, 其在 x 轴上的投影点 $Q(x,0)$ 的运动速度 $V=V(t)$ 的图象大致为 ( )

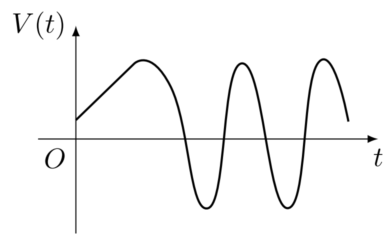




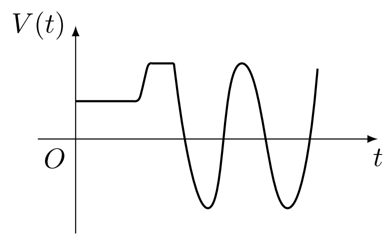
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 若存在过点 $(1,0)$ 的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切, 则 a 等于 ( )

(A) -1 或 $-\frac{25}{64}$　(B) -1 或 $\frac{21}{4}$　(C) $-\frac{7}{4}$ 或 $-\frac{25}{64}$　(D) $-\frac{7}{4}$ 或 7

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,3)$, $\boldsymbol{c}=(k,2)$. 若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $k=$______.

14. 体积为 8 的一个正方体, 其全面积与球 O 的表面积相等, 则球 O 的体积等于______.

15. 若不等式 $\sqrt{4-x^2}\leqslant k(x+1)$ 的解集为区间 $[a,b]$, 且 $b-a=1$, 则 $k=$______.

16. 设直线系 M: $x\cos\theta+(y-2)\sin\theta=1$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 对于下列四个命题:

A. 存在一个圆与所有直线相交;
B. 存在一个圆与所有直线不相交;
C. 存在一个圆与所有直线相切;
D. M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-a$.

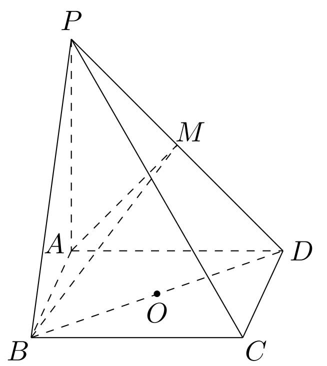
(1) 对于任意实数 x, $f'(x)\geqslant m$ 恒成立, 求 m 的最大值;
(2) 若方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根, 求 a 的取值范围.

18. 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是 $\frac{1}{2}$. 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助. 求:

(1) 该公司的资助总额为零的概率;
(2) 该公司的资助总额超过 15 万元的概率.

19. $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $A=\dfrac{\pi}{6}$, $(1+\sqrt{3})c=2b$.
(1) 求 C;
(2) 若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=1+\sqrt{3}$, 求 a, b, c.

20. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD=4$, $AB=2$. 以 BD 的中点 O 为球心、BD 为直径的球面交 PD 于点 M.
(1) 求证: 平面 $ABM\perp$ 平面 PCD;
(2) 求直线 PC 与平面 ABM 所成的角;
(3) 求点 O 到平面 ABM 的距离.



21. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=n^2\left(\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3}\right)$, 其前 n 项和为 S_n.
(1) 求 S_n;
(2) $b_n=\dfrac{S_{3n}}{n\cdot 4^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, 已知圆 G: $(x-2)^2+y^2=r^2$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 的内接 $\triangle ABC$ 的内切圆, 其中 A 为椭圆的左顶点.
(1) 求圆 G 的半径 r;
(2) 过点 M (0, 1) 作圆 G 的两条切线交椭圆于 E, F 两点, 证明: 直线 EF 与圆 G 相切.