2009 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 若 $\log_2 a<0$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^b>1$, 则 ( )

(A) $a>1$, $b>0$ (B) $a>1$, $b<0$

(C) $0<a<1$, $b>0$ (D) $0<a<1$, $b<0$

2. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, “$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$”是“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”的 ( )

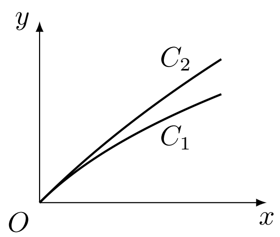
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 φ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 的单位后, 得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 则 φ 等于 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{5\pi}{6}$ (C) $\dfrac{7\pi}{6}$ (D) $\dfrac{11\pi}{6}$

4. 如图, 当参数 $\lambda=\lambda_1$, λ_2 时, 连续函数 $y=\dfrac{x}{1+\lambda x}$ $(x\geqslant 0)$ 的图象分别对应曲线 C_1 和 C_2, 则 ( )



(A) $0<\lambda_1<\lambda$ (B) $0<\lambda<\lambda_1$ (C) $\lambda_1<\lambda_2<0$ (D) $\lambda_2<\lambda_1<0$

5. 从 10 名大学生毕业生中选 3 个人担任村长助理, 则甲、乙至少有 1 人入选, 而丙没有入选的不同选法的种数位 ( )

(A) 85 (B) 56 (C) 49 (D) 28

6. 已知 D 是由不等式组 $\begin{cases}x-2y\geqslant 0,\\ x+3y\geqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域, 则圆 $x^2+y^2=4$ 在区域 D 内的弧长为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{3\pi}{4}$ (D) $\dfrac{3\pi}{2}$

7. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱上到异面直线 AB, CC_1 的距离相等的点的个数为 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

8. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义. 对于给定的正数 K, 定义函数 $f_K(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\leqslant K,\\ K, & f(x)>K.\end{cases}$ 取函数 $f(x)=2-x-\mathrm{e}^{-x}$. 若对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 恒有 $f_K(x)=f(x)$, 则 ( )

(A) K 的最大值为 2 (B) K 的最小值为 2

(C) K 的最大值为 1 (D) K 的最小值为 1

二、填空题

9. 某班共 30 人, 其中 15 人喜爱篮球运动, 10 人喜爱乒乓球运动, 8 人对这两项运动都不喜爱, 则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为______.

10. 在 $(1+x)^3+(1+\sqrt{x})^3+(1+\sqrt[3]{x})^3$ 的展开式中, x 的系数为______. (用数字作答)

11. 若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $2\tan x+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小值为______.

12. 已知以双曲线 C 的两个焦点及虚轴的两个端点为原点的四边形中, 有一个内角为 60°, 则双曲线 C 的离心率为______.

13. 一个总体分为 A, B 两层, 其个体数之比为 $4:1$, 用分层抽样方法从总体中抽取一个容量为 10 的样本. 已知 B 层中甲、乙都被抽到的概率为 $\dfrac{1}{28}$, 则总体中的个体数为______.

14. 在半径为 13 的球面上有 A, B, C 三点, $AB=6$, $BC=8$, $CA=10$, 则
(1) 球心到平面 ABC 的距离为______;
(2) 过 A, B 两点的大圆面与平面 ABC 所成二面角为 (锐角) 的正切值为______.

15. 将正 $\triangle ABC$ 分割成 n^2 $(n\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}^*)$ 个全等的小正三角形 (图 1, 图 2 分别给出了 $n=2$, 3 的情形), 在每个三角形的顶点各放置一个数, 使位于 $\triangle ABC$ 的三边及平行于某边的任一直线上的数 (当数的个数不少于 3 时) 都分别依次成等差数列. 若顶点 A, B, C 处的三个数互不相同且和为 1, 记所有顶点上的数之和为 $f(n)$, 则有 $f(2)=2$, $f(3)=$______, $\cdots$, $f(n)=$______.

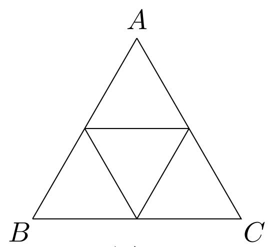


图 1

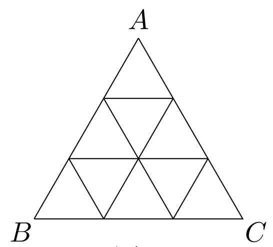


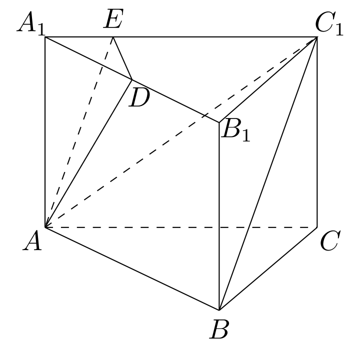
图 2

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=3\overrightarrow{BC}^2$, 求角 A, B, C 的大小.

17. 为拉动经济增长, 某市决定新建一批重点工程, 分别为基础设施工程、民生工程和产业建设工程三类. 这三类工程所含项目的个数分别占总数的 $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{6}$. 现在 3 名工人独立地从中任选一个项目参与建设.
(1) 求他们选择的项目所属类别互不相同的概率;
(2) 记 ξ 为 3 人中选择的项目属于基础设施工程或产业建设工程的人数, 求 ξ 的分布列及数学期望.

18. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=\sqrt{2}AA_1$. 点 D 是 A_1B_1 的中点, 点 E 在 A_1C_1 上, 且 $DE\perp AE$.
(1) 证明: 平面 $ADE\perp$ 平面 ACC_1A_1;
(2) 求直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值.



19. 某地建一座桥, 两端的桥墩已建好, 这两墩相距 m 米, 余下工程只需要建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算, 一个桥墩的工程费用为 256 万元, 距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2+\sqrt{x})x$ 万元. 假设桥墩等距离分布, 所有桥墩都视为点, 且不考虑其他因素, 记余下工程的费用为 y 万元.
(1) 试写出 y 关于 x 的函数关系式;
(2) 当 $m=640$ 米时, 需新建多少个桥墩才能使 y 最小?

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到点 $F(3,0)$ 的距离的 4 倍与它到直线 $x=2$ 的距离的 3 倍之和记为 d. 当点 P 运动时, d 恒等于点 P 的横坐标与 18 之和.
(1) 求点 P 的轨迹 C;
(2) 设过点 F 的直线 l 与轨迹 C 相交于 M, N 两点, 求线段 MN 长度的最大值.

21. 对于数列 $\{u_n\}$, 若存在常数 $M>0$, 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 恒有 $|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\leqslant M$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为 $B-$ 数列.
(1) 首项为 1, 公比为 q ($|q|<1$) 的等比数列是否为 $B-$ 数列? 请说明理由;
(2) 设 S_n 是数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和, 给出下列两组论断:
A 组: ① 数列 $\{x_n\}$ 是 $B-$ 数列　② 数列 $\{x_n\}$ 不是 $B-$ 数列
B 组: ③ 数列 $\{S_n\}$ 是 $B-$ 数列　④ 数列 $\{S_n\}$ 不是 $B-$ 数列
请以其中一组中的一个论断为条件, 另一组中的一个论断为结论组成一个命题. 判断所给命题的真假, 并证明你的结论;
(3) 若数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是 $B-$ 数列, 证明: 数列 $\{a_nb_n\}$ 也是 $B-$ 数列.