2009 普通高等学校招生考试 (重庆卷理)

一、选择题

1. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系是 ( )

(A) 相切　(B) 相交但直线不过圆心

(C) 直线过圆心　(D) 相离

2. 已知复数 z 的实部为 -1, 虚部为 2, 则 $\dfrac{5\mathrm{i}}{z}=$ ( )

(A) $2-\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $-2-\mathrm{i}$　(D) $-2+\mathrm{i}$

3. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数是 ( )

(A) 16　(B) 70　(C) 560　(D) 1120

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=6$, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=2$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

5. 不等式 $|x+3|-|x-1|\leqslant a^2-3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ( )

(A) $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$　(B) $(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$

(C) $[1,2]$　(D) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

6. 锅中煮有芝麻馅汤圆 6 个, 花生馅汤圆 5 个, 豆沙馅汤圆 4 个, 这三种汤圆的外部特征完全相同. 从中任意舀取 4 个汤圆, 则每种汤圆都至少取到 1 个的概率为 ( )

(A) $\dfrac{8}{91}$　(B) $\dfrac{25}{91}$　(C) $\dfrac{48}{91}$　(D) $\dfrac{60}{91}$

7. 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C, 向量 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{3}\sin A,\sin B\right)$, $\boldsymbol{n}=\left(\cos B,\sqrt{3}\cos A\right)$, 若 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1+\cos(A+B)$, 则 $C=$ ( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$　(D) $\dfrac{5\pi}{6}$

8. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-ax-b\right)=2$, 其中 $a,b\in\mathbf{R}$, 则 $a-b$ 的值为 ( )

(A) -6　(B) -2　(C) 2　(D) 6

9. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 50°, P 为空间中任意一点, 则过点 P 且与平面 α 和平面 β 所成的角都是 25° 的直线的条数为 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

10. 已知以 $T=4$ 为周期的函数 $f(x)=\begin{cases}m\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1,1],\\ 1-|x-2|, & x\in(1,3],\end{cases}$ 其中 $m>0$. 若方程 $3f(x)=x$ 恰有 5 个实数解, 则 m 的取值范围为 ( )

(A) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$　(C) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$　(D) $\left(\dfrac{4}{3},\sqrt{7}\right)$

二、填空题

11. 若 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|<3\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2^x>1\}$, 则 $A\cap B=$______.

12. 若 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+a$ 是奇函数, 则 $a=$______.

13. 将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官, 每个乡镇至少一名, 则不同的分配方案有______种. (用数字作答)

14. 设 $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+1}$, $b_n=\left|\dfrac{a_n+2}{a_n-1}\right|$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n=$______.

15. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. 若双曲线上存在一点 P 使 $\dfrac{\sin\angle PF_1F_2}{\sin\angle PF_2F_1}=\dfrac{a}{c}$, 则该双曲线的离心率的取值范围为______.

三、解答题

16. 设函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\pi}{8}x+1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 求当 $x\in\left[0,\dfrac{4}{3}\right]$ 时 $y=g(x)$ 的最大值.

17. 某单位为绿化环境, 移栽了甲、乙两种大树各 2 株. 设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$, 且各株大树是否成活互不影响. 求移栽的 4 株大树中:

(1) 两种大树各成活 1 株的概率;

(2) 成活的株数 ξ 的分布列与期望.

18. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+k$ $(k>0)$ 在 $x=0$ 处取得极值, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于直线 $x+2y+1=0$.

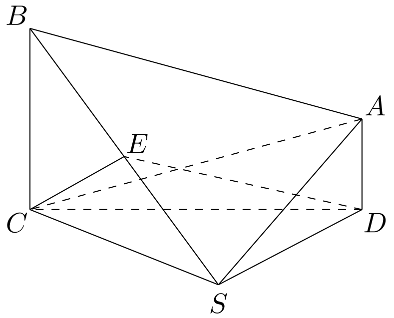
(1) 求 a, b 的值;

(2) 若函数 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)}$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

19. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ 且 $AD \perp CD$; 平面 $CSD \perp$ 平面 $ABCD$, $CS \perp DS$, $CS=2AD=2$, E 为 BS 的中点, $CE=\sqrt{2}$, $AS=\sqrt{3}$. 求:

(1) 点 A 到平面 BCS 的距离;

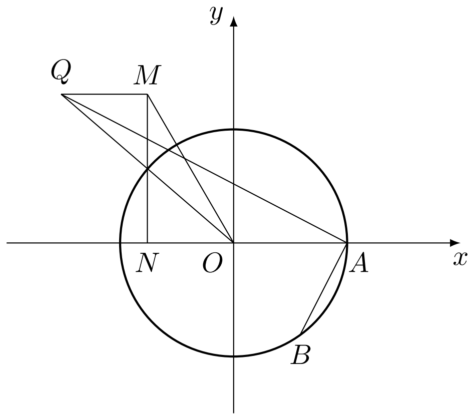
(2) 二面角 $E-CD-A$ 的大小.



20. 已知以原点 O 为中心的椭圆的一条准线方程为 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, M 是椭圆上的动点.

(1) 若点 C, D 的坐标分别是 $\left(0,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$, 求 $|MC|\cdot|MD|$ 的最大值;

(2) 如图, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, B 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的点, N 是点 M 在 x 轴上的射影, 点 Q 满足条件: $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{BA}=0$. 求线段 QB 的中点 P 的轨迹方程.



21. 设 m 个不全相等的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ $(m \geqslant 7)$ 依次围成一个圆圈.

(1) 若 $m=2009$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_{1005}$ 是公差为 d 的等差数列, 而 $a_1, a_{2009}, a_{2008}, \cdots, a_{1006}$ 是公比为 q 的等比数列; 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的前 n 项和 S_n $(n \leqslant m)$ 满足: $S_3=15$, $S_{2009}=S_{2007}+12a_1$, 求通项 a_n $(n \leqslant m)$;

(2) 若每个数 a_n $(n \leqslant m)$ 是其左右相邻两数平方的等比中项, 求证: $a_1+\cdots+a_6+a_7^2+\cdots+a_m^2>ma_1a_2\cdots a_m$.