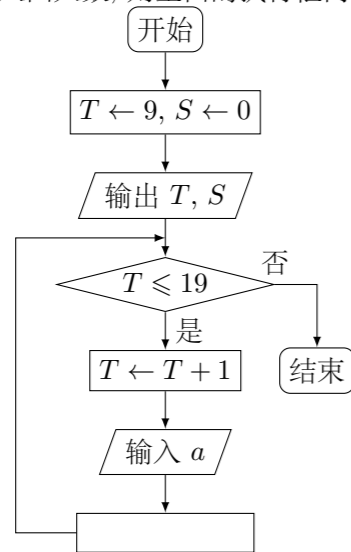


2010 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 3, m\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $m =$ _____.
2. 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 的解集是_____.
3. 行列式 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ 的值是_____.
4. 若复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位), 则 $z \cdot \bar{z} + z =$ _____.
5. 将一个总体为 A 、 B 、 C 三层, 其个体数之比为 $5:3:2$. 若用分层抽样方法抽取容量为 100 的样本, 则应从中抽取_____个个体.
6. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 6 的正方形, 侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = 8$, 则该四棱锥的体积是_____.
7. 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 的圆心到直线 $l: 3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d =$ _____.
8. 动点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x + 2 = 0$ 的距离相等, 则点 P 的轨迹方程为_____.
9. 函数 $f(x) = \log_3(x + 3)$ 的反函数的图象与 y 轴的交点坐标是_____.
10. 从一副混合后的扑克牌 (52 张) 中随机抽取 2 张, 则“抽出的 2 张均为红桃”的概率为_____. (结果用最简分数表示)
11. 2010 年上海世博会园区每天 9:00 开园, 20:00 停止入园. 在下边的框图中, S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数, a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数, 则空白的执行框内应填入_____.



12. 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中, 记位于第 i 行第 j 列的数为 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). 当 $n = 9$ 时, $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} =$ _____.

13. 在平面直角坐标系中, 双曲线 Γ 的中心在原点, 它的一个焦点坐标为 $(\sqrt{5}, 0)$, $\vec{e}_1 = (2, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, -1)$ 分别是两条渐近线的方向向量. 任取双曲线 Γ 上的点 P , 若 $\vec{OP} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 则 a, b 满足的一个等式是_____.
14. 将直线 $l_1: x + y - 1 = 0$, $l_2: nx + y - n = 0$, $l_3: x + ny - n = 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$) 围成的三角形面积记为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

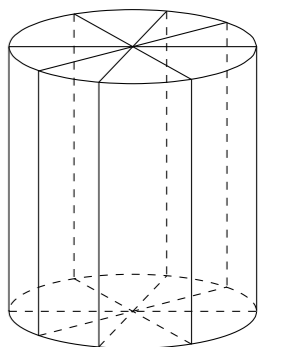
二、选择题

15. 满足线性约束条件 $\begin{cases} 2x + y \leq 3, \\ x + 2y \leq 3, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的目标函数 $z = x + y$ 的最大值是 ()
(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3
16. “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$)”是“ $\tan x = 1$ ”成立的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
17. 若 x_0 是方程 $\lg x + x = 2$ 的解, 则 x_0 属于区间 ()
(A) $(0, 1)$ (B) $(1, 1.25)$ (C) $(1.25, 1.75)$ (D) $(1.75, 2)$
18. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 11 : 13$, 则 $\triangle ABC$ ()
(A) 一定是锐角三角形
(B) 一定是直角三角形
(C) 一定是钝角三角形
(D) 可能是锐角三角形, 也可能是钝角三角形

三、解答题

19. 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简:
 $\lg(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}) + \lg[\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})] - \lg(1 + \sin 2x)$.

20. 如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作 4 个全等的矩形骨架, 总计耗用 9.6 米铁丝, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面 (不安装上底面).
(1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值 (结果精确到 0.01 平方米);
(2) 若要制作一个如图放置的, 底面半径为 0.3 米的灯笼, 请作出用于灯笼的三视图 (作图时, 不需考虑骨架等因素).



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n - 5a_n - 85, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出使得 $S_{n+1} > S_n$ 成立的最小正整数 n .

22. 若实数 x, y, m 满足 $|x - m| < |y - m|$, 则称 x 比 y 接近 m .

(1) 若 $x^2 - 1$ 比 3 接近 0, 求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a, b , 证明: $a^2b + ab^2$ 比 $a^3 + b^3$ 接近 $2ab\sqrt{ab}$;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = \{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R}\}$. 任取 $x \in D$, $f(x)$ 等于 $1 + \sin x$ 和 $1 - \sin x$ 中接近 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的奇偶性、最小正周期、最小值和单调性 (结论不要求证明).

23. 已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $A(0, b), B(0, -b)$ 和 $Q(a, 0)$ 为 Γ 的三个顶点.

(1) 若点 M 满足 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB})$, 求点 M 的坐标;

(2) 设直线 $l_1: y = k_1x + p$ 交椭圆 Γ 于 C, D 两点, 交直线 $l_2: y = k_2x$ 于点 E . 若 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$, 证明: E 为 CD 的中点;

(3) 设点 P 在椭圆 Γ 内且不在 x 轴上, 如何作过 PQ 中点 F 的直线 l , 使得 l 与椭圆 Γ 两个交点 P_1, P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$? 令 $a = 10, b = 5$, 点 P 的坐标是 $(-8, -1)$. 若椭圆 Γ 上的点 P_1, P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$, 求点 P_1, P_2 的坐标.