2010 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 集合 $P=\{x\in\mathbf{Z}\mid 0\leqslant x<3\}$, $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2\leqslant 9\}$, 则 $P\cap M=$ ( )

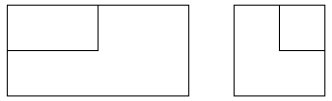
(A) $\{1,\ 2\}$ (B) $\{0,\ 1,\ 2\}$

(C) $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$ (D) $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$

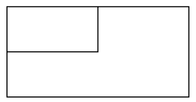
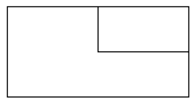
2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 公比 $|q|\neq 1$. 若 $a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$, 则 $m=$ ( )

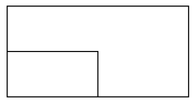
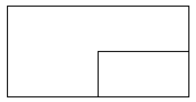
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

3. 一个长方体去掉一个小长方体, 所得几何体的正 (主) 视图与侧 (左) 视图分别如图所示, 则该几何体的俯视图为 ( )



正 (主) 视图　侧 (左) 视图

(A)  (B) 

(C)  (D) 

4. 8 名学生和 2 位老师站成一排合影, 2 位老师不相邻的排法种数为 ( )

(A) $\mathrm{A}_8^8\mathrm{A}_9^2$ (B) $\mathrm{A}_8^8\mathrm{C}_9^2$ (C) $\mathrm{A}_8^8\mathrm{A}_7^2$ (D) $\mathrm{A}_8^8\mathrm{C}_7^2$

5. 极坐标方程 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0$ $(\rho\geqslant 0)$ 表示的图形是 ( )

(A) 两个圆 (B) 两条直线

(C) 一个圆和一条射线 (D) 一条直线和一条射线

6. $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量. "$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"是"函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 为一次函数"的 ( )

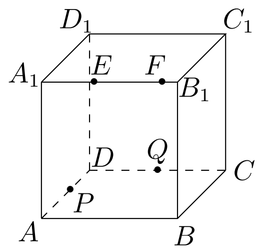
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 设不等式组 $\begin{cases}x+y-11\geqslant 0,\\3x-y+3\geqslant 0,\\5x-3y+9\leqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 若指数函数 $y=a^x$ 的图象上存在区域 D 内的点, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(1,3]$ (B) $[2,3]$ (C) $(1,2]$ (D) $[3,+\infty)$

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上, 动点 P, Q 分别在棱 AD, CD 上, 若 $EF=1$, $A_1E=x$, $DQ=y$, $DP=z$ (x, y, z 大于零), 则四面体 $PEFQ$ 的体积 ( )



(A) 与 x, y, z 都有关 (B) 与 x 有关, 与 y, z 无关

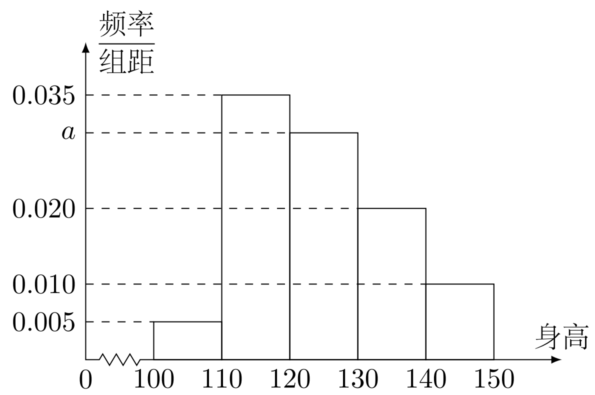
(C) 与 y 有关, 与 x, z 无关 (D) 与 z 有关, 与 x, y 无关

二、填空题

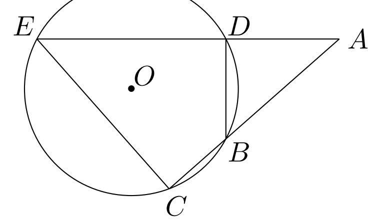
9. 在复平面内, 复数 $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为______.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$, 则 $a=$______.

11. 从某小学随机抽取 100 名同学, 将他们的身高 (单位: 厘米) 数据绘制成频率分布直方图 (如图). 由图中数据可知 $a=$______. 若要从身高在 $[120,130)$, $[130,140)$, $[140,150]$ 三组内的学生中, 用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动, 则从身高在 $[140,150]$ 内的学生中选取的人数应为______.



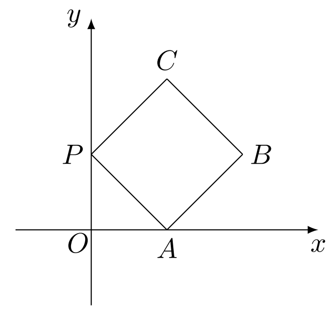
12. 如图, $\odot O$ 的弦 ED, CB 的延长线交于点 A. 若 $BD\perp AE$, $AB=4$, $BC=2$, $AD=3$, 则 $DE=$______; $CE=$______.



13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的焦点相同, 那么双曲线的焦点坐标为______; 渐近线方程为______.

14. 如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动. 设顶点 $P(x,y)$ 的轨迹方程是 $y=f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为; $y=f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为______.

说明: "正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动"包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B 落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动.



三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=2\cos 2x+\sin^2x$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值;

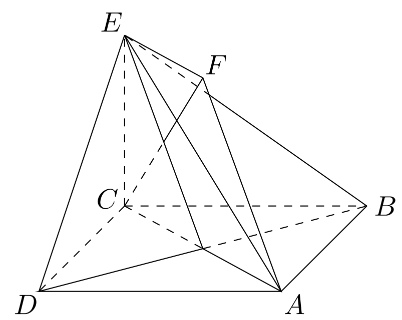
(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $CE\perp AC$, $EF\parallel AC$, $AB=\sqrt{2}$, $CE=EF=1$.

(1) 求证: $AF\parallel$ 平面 BDE;

(2) 求证: $CF\perp$ 平面 BDE;

(3) 求二面角 $A-BE-D$ 的大小.



17. 某同学参加 3 门课程的考试. 假设该同学第一门课程取得优秀成绩的概率为 $\frac{4}{5}$, 第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为 p, q $(p>q)$, 且不同课程是否取得优秀成绩相互独立. 记 ξ 为该生取得优秀成绩的课程数, 其分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{125}$	a	b	$\frac{24}{125}$

(1) 求该生至少有 1 门课程取得优秀成绩的概率;
(2) 求 p, q 的值;
(3) 求数学期望 $E\xi$.

18. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{k}{2}x^2$ $(k\geqslant 0)$.
(1) 当 $k=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;
(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 B 与点 $A(-1,1)$ 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.
(1) 求动点 P 的轨迹方程;
(2) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M, N, 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ x_i\in\{0,\ 1\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ $(n\geqslant 2)$, 对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\cdots b_n)\in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.
(1) 证明: $\forall A,\ B,\ C\in S_n$, 有 $A-B\in S_n$, 且 $d(A-C,B-C)=d(A,B)$;
(2) 证明: $\forall A,\ B,\ C\in S_n$, $d(A,B)$, $d(A,C)$, $d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数;
(3) 设 $P\subseteq S_n$, P 中有 m $(m\geqslant 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\overline{d}(P)$. 证明: $\overline{d}(P)\leqslant\frac{mn}{2(m-1)}$.