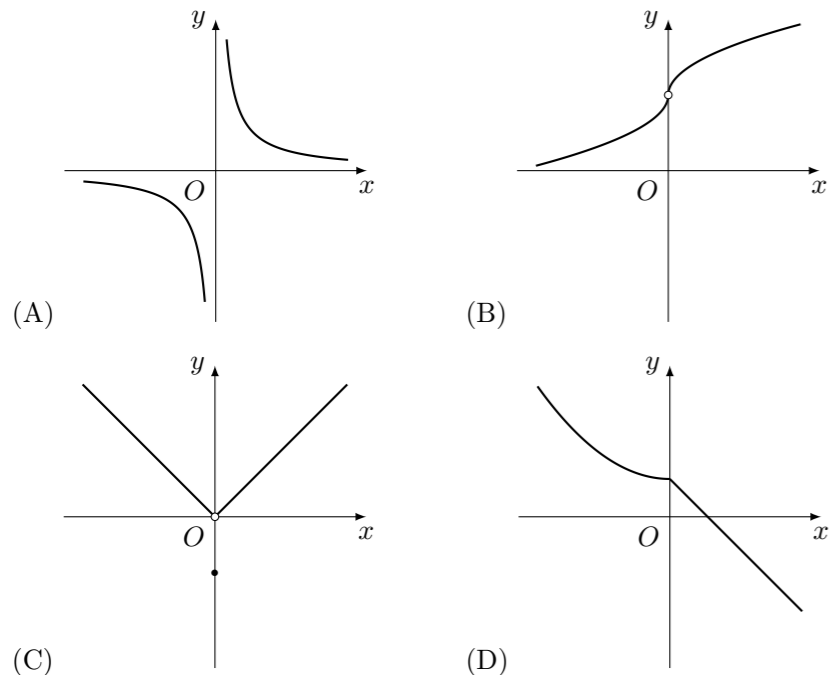


## 2010 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

### 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 计算  $i + i^2 + i^3 =$  ( )  
 (A)  $-1$  (B)  $1$  (C)  $-i$  (D)  $i$

2. 下列四个图象所表示的函数, 在点  $x = 0$  处连续的是 ( )



3.  $2\log_5 10 + \log_5 0.25 =$  ( )  
 (A)  $0$  (B)  $1$  (C)  $2$  (D)  $4$

4. 函数  $f(x) = x^2 + mx + 1$  的图象关于直线  $x = 1$  对称的充要条件是 ( )  
 (A)  $m = -2$  (B)  $m = 2$  (C)  $m = -1$  (D)  $m = 1$

5. 设点  $M$  是线段  $BC$  的中点, 点  $A$  在直线  $BC$  外,  $BC^2 = 16$ ,  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ , 则  $AM =$  ( )  
 (A)  $8$  (B)  $4$  (C)  $2$  (D)  $1$

6. 将函数  $y = \sin x$  的图象上所有的点向右平行移动  $\frac{\pi}{10}$  个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的  $2$  倍 (纵坐标不变), 所得图象的函数解析式是 ( )  
 (A)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{10}\right)$  (B)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$   
 (C)  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{10}\right)$  (D)  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{20}\right)$

7. 某加工厂用某原料由甲车间加工出  $A$  产品, 由乙车间加工出  $B$  产品. 甲车间加工一箱原料需耗费工时  $10$  小时可加工出  $7$  千克  $A$  产品, 每千克  $A$  产品获利  $40$  元. 乙车间加工一箱原料需耗费工时  $6$  小时可加工出  $4$  千克  $B$  产品, 每千克  $B$  产品获利  $50$  元. 甲、乙两车间每天共能完成至多  $70$  箱原

料的加工, 每天甲、乙两车间耗费工时总和不得超过  $480$  小时, 甲、乙两车间每天总获利最大的生产计划为 ( )

- (A) 甲车间加工原料  $10$  箱, 乙车间加工原料  $60$  箱  
 (B) 甲车间加工原料  $15$  箱, 乙车间加工原料  $55$  箱  
 (C) 甲车间加工原料  $18$  箱, 乙车间加工原料  $50$  箱  
 (D) 甲车间加工原料  $40$  箱, 乙车间加工原料  $30$  箱

8. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 \neq 0$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_{n+1} = 2S_n + a_1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} =$  ( )

- (A)  $0$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $1$  (D)  $2$

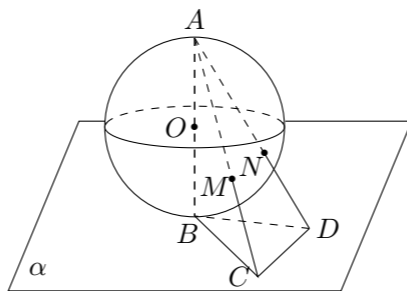
9. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 其右准线与  $x$  轴的交点为  $A$ , 在椭圆上存在点  $P$  满足线段  $AP$  的垂直平分线过点  $F$ , 则椭圆离心率的取值范围是 ( )

- (A)  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  (B)  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$  (C)  $[\sqrt{2} - 1, 1)$  (D)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

10. 由  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  组成没有重复数字且  $1, 3$  都不与  $5$  相邻的六位偶数的个数是 ( )

- (A)  $72$  (B)  $96$  (C)  $108$  (D)  $144$

11. 半径为  $R$  的球  $O$  的直径  $AB$  垂直于平面  $\alpha$ , 垂足为  $B$ ,  $\triangle BCD$  是平面  $\alpha$  内边长为  $R$  的正三角形, 线段  $AC, AD$  分别与球面交于点  $M, N$ , 那么  $M, N$  两点间的球面距离是 ( )



- (A)  $R \arccos \frac{17}{25}$  (B)  $R \arccos \frac{18}{25}$  (C)  $\frac{1}{3}\pi R$  (D)  $\frac{4}{15}\pi R$

12. 设  $a > b > c > 0$ , 则  $2a^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} - 10ac + 25c^2$  的最小值是 ( )

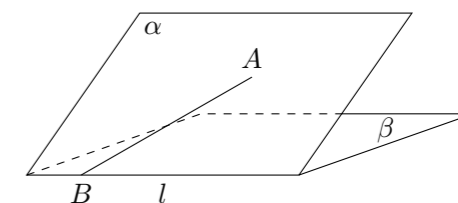
- (A)  $2$  (B)  $4$  (C)  $2\sqrt{5}$  (D)  $5$

### 二、填空题

13.  $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  的展开式中的第四项是\_\_\_\_\_.

14. 直线  $x - 2y + 5 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 8$  相交于  $A, B$  两点, 则  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

15. 如图, 二面角  $\alpha - l - \beta$  的大小是  $60^\circ$ ,  $AB \subset \alpha$ ,  $B \in l$ ,  $AB$  与  $l$  所成的角为  $30^\circ$ , 则  $AB$  与平面  $\beta$  所成角的正弦值是\_\_\_\_\_.



16. 设  $S$  为复数集  $\mathbf{C}$  的非空子集. 若对任意  $x, y \in S$ , 都有  $x + y, x - y, xy \in S$ , 则称  $S$  为封闭集. 下列命题:

- ① 集合  $S = \{a + bi \mid a, b \text{ 为整数, } i \text{ 为虚数单位}\}$  为封闭集;  
 ② 若  $S$  为封闭集, 则一定有  $0 \in S$ ;  
 ③ 封闭集一定是无限集;  
 ④ 若  $S$  为封闭集, 则满足  $S \subseteq T \subseteq \mathbf{C}$  的任意集合  $T$  也是封闭集.  
 其中真命题是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

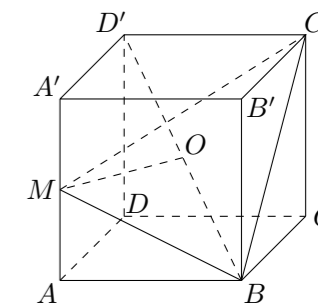
### 三、解答题

17. 某种有奖销售的饮料, 瓶盖内印有“奖励一瓶”或“谢谢购买”字样, 购买一瓶若其瓶盖内印有“奖励一瓶”字样即为中奖, 中奖概率为  $\frac{1}{6}$ . 甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料.

- (1) 求甲中奖且乙、丙都没有中奖的概率;  
 (2) 求中奖人数  $\xi$  的分布列及数学期望  $E\xi$ .

18. 已知正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  的棱长为  $1$ , 点  $M$  是棱  $AA'$  的中点, 点  $O$  是对角线  $BD'$  的中点.

- (1) 求证:  $OM$  为异面直线  $AA'$  和  $BD'$  的公垂线;  
 (2) 求二面角  $M - BC' - B'$  的大小;  
 (3) 求三棱锥  $M - OBC$  的体积.



19. (1) ① 证明两角和的余弦公式  $C_{(\alpha+\beta)}$ :  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ;

② 由  $C_{(\alpha+\beta)}$  推导两角和的正弦公式  $S_{(\alpha+\beta)}$ :  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

(2) 已知  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2}$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ , 且  $\cos B = \frac{3}{5}$ , 求  $\cos C$ .

21. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$ , 且对任意  $m, n \in \mathbf{N}^*$  都有  $a_{2m-1} + a_{2n-1} = 2a_{m+n-1} + 2(m-n)^2$ .

(1) 求  $a_3, a_5$ ;

(2) 设  $b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 证明: 数列  $\{b_n\}$  是等差数列;

(3) 设  $c_n = (a_{n+1} - a_n)q^{n-1}$  ( $q \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$ ), 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

22. 设  $f(x) = \frac{1+a^x}{1-a^x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ),  $g(x)$  是  $f(x)$  的反函数.

(1) 设关于  $x$  的方程  $\log_a \frac{t}{(x^2-1)(7-x)} = g(x)$  在区间  $[2, 6]$  上有实数解, 求  $t$  的取值范围;

(2) 当  $a = e$  ( $e$  为自然对数的底数) 时, 证明:  $\sum_{k=2}^n g(k) > \frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$ ;

(3) 当  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  时, 试比较  $\left| \sum_{k=1}^n f(k) - n \right|$  与 4 的大小, 并说明理由.

20. 已知定点  $A(-1, 0)$ ,  $F(2, 0)$ , 定直线  $l: x = \frac{1}{2}$ , 不在  $x$  轴上的动点  $P$  与点  $F$  的距离是它到直线  $l$  的距离的 2 倍. 设点  $P$  的轨迹为  $E$ , 过点  $F$  的直线交  $E$  于  $B, C$  两点, 直线  $AB, AC$  分别交  $l$  于点  $M, N$ .

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 试判断以线段  $MN$  为直径的圆是否过点  $F$ , 并说明理由.