2010 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

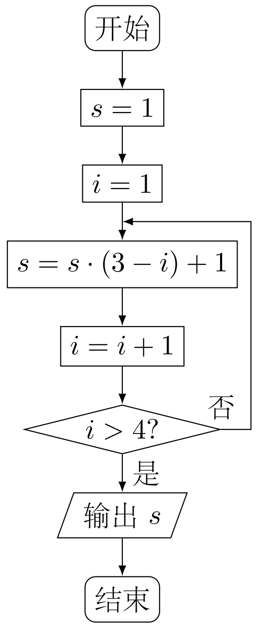
1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $2+4\mathrm{i}$ (C) $-1-2\mathrm{i}$ (D) $2-\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 3, \\ x-y\geqslant -1, \\ y\geqslant 1, \end{cases}$ 则目标函数 $z=4x+2y$ 的最大值为 ( )

(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 2

3. 阅读下面的程序框图, 若输出 s 的值为 -7, 则判断框内可填写 ( )



(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3

4. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是 ( )

(A) $(-2,-1)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(0,1)$ (D) $(1,2)$

5. 下列命题中, 真命题是 ( )

(A) $\exists m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

(B) $\exists m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

(C) $\forall m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

(D) $\forall m\in\mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ $(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数

6. 设 $a=\log_5 4$, $b=(\log_5 3)^2$, $c=\log_4 5$, 则 ( )

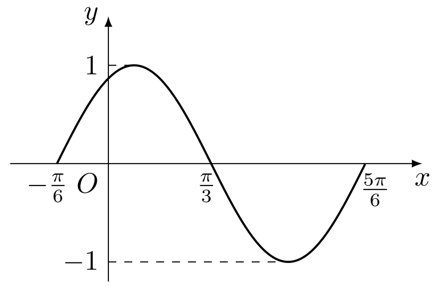
(A) $a<c<b$ (B) $b<c<a$ (C) $a<b<c$ (D) $b<a<c$

7. 设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid 1<x<5,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 6\}$ (B) $\{a\mid a\leqslant 2$ 或 $a\geqslant 4\}$

(C) $\{a\mid a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 6\}$ (D) $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 4\}$

8. 如图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的图象, 为了得到这个函数的图象, 只要将 $y=\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象上所有的点 ( )



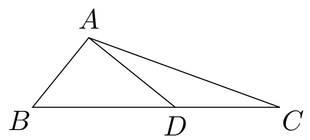
(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

(B) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

(D) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD\perp AB$, $\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$ ( )



(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

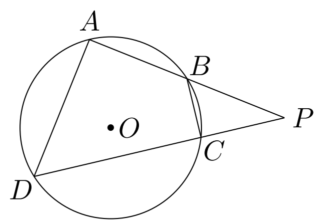
10. 设函数 $g(x)=x^2-2$ $(x\in\mathbf{R})$, $f(x)=\begin{cases} g(x)+x+4, & x<g(x), \\ g(x)-x, & x\geqslant g(x), \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{9}{4},0\right]\cup(1,+\infty)$ (B) $[0,+\infty)$

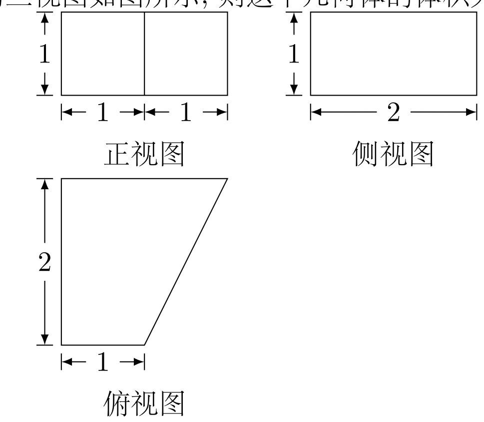
(C) $\left[-\dfrac{9}{4},+\infty\right)$ (D) $\left[-\dfrac{9}{4},0\right]\cup(2,+\infty)$

二、填空题

11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, 延长 AB 和 DC 相交于点 P. 若 $PB=1$, $PD=3$, 则 $\dfrac{BC}{AD}$ 的值为______.



12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为______.



13. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$, 它的一个焦点与抛物线 $y^2=16x$ 的焦点相同. 则双曲线的方程为______.

14. 已知圆 C 的圆心是直线 $x-y+1=0$ 与 x 轴的交点, 且圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切, 则圆 C 的方程为______.

15. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比 $q=\sqrt{2}$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 记 $T_n=\dfrac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 设 T_{n_0} 为数列 $\{T_n\}$ 的最大项, 则 $n_0=$______.

16. 设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$, 对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\cos B}{\cos C}$.

(1) 证明: $B=C$;

(2) 若 $\cos A=-\dfrac{1}{3}$, 求 $\sin\left(4B+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 有编号为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} 的 10 个零件, 测量其直径 (单位: cm), 得到下面数据:

编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
直径	1.51	1.49	1.49	1.51	1.49	1.51	1.47	1.46	1.53	1.47

其中直径在区间 $[1.48, 1.52]$ 内的零件为一等品.

(1) 从上述 10 个零件中, 随机抽取一个, 求这个零件为一等品的概率;

(2) 从一等品零件中, 随机抽取 2 个.

① 用零件的编号列出所有可能的抽取结果;

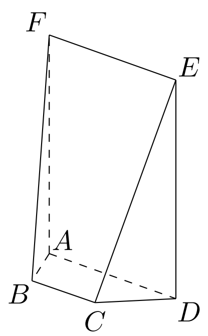
② 求这 2 个零件直径相等的概率.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ADEF$ 是正方形, $FA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $CD = 1$, $AD = 2\sqrt{2}$, $\angle BAD = \angle CDA = 45°$.

(1) 求异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值;

(2) 证明 $CD \perp$ 平面 ABF;

(3) 求二面角 $B - EF - A$ 的正切值.



20. 已知函数 $f(x) = ax^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1\ (x \in \mathbf{R})$, 其中 $a > 0$.

(1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 若在区间 $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ 上, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B, 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

① 若 $|AB| = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$, 求直线 l 的倾斜角;

② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$. 求 y_0 的值.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, 且对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1} 成等差数列, 其公差为 $2k$.

(1) 证明 a_4, a_5, a_6 成等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 记 $T_n = \dfrac{2^2}{a_2} + \dfrac{3^2}{a_3} + \cdots + \dfrac{n^2}{a_n}$, 证明 $\dfrac{3}{2} < 2n - T_n \leqslant 2\ (n \geqslant 2)$.