2010 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{-1+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $5+5\mathrm{i}$ (C) $-5-5\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

2. 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是 ( )

(A) $(-2,-1)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(0,1)$ (D) $(1,2)$

3. 命题"若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x)$ 是奇函数"的否命题是 ( )

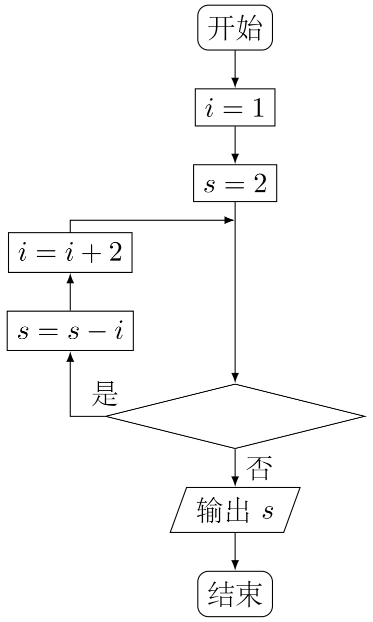
(A) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x)$ 是偶函数

(B) 若 $f(x)$ 不是奇函数, 则 $f(-x)$ 不是奇函数

(C) 若 $f(-x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

(D) 若 $f(-x)$ 不是奇函数, 则 $f(x)$ 不是奇函数

4. 阅读下面的程序框图, 若输出 s 的值为 -7, 则判断框内可填写 ( )



(A) $i<3?$ (B) $i<4?$ (C) $i<5?$ (D) $i<6?$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$, 它的一个焦点在抛物线 $y^2=24x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{108}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{108}-\dfrac{y^2}{36}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{27}-\dfrac{y^2}{9}=1$

6. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $9S_3=S_6$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为 ( )

(A) $\dfrac{15}{8}$ 或 5 (B) $\dfrac{31}{16}$ 或 5 (C) $\dfrac{31}{16}$ (D) $\dfrac{15}{8}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A,\ B,\ C$ 的对边分别是 $a,\ b,\ c$, 若 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$, $\sin C=2\sqrt{3}\sin B$, 则 $A=$ ( )

(A) $30°$ (B) $60°$ (C) $120°$ (D) $150°$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)>f(-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ( )

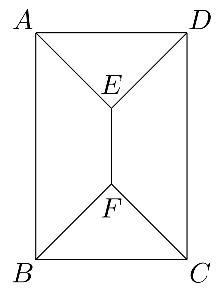
(A) $(-1,0)\cup(0,1)$ (B) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(C) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

9. 设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid |x-b|>2,\ x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$, 则实数 a,b 必满足 ( )

(A) $|a+b|\leqslant 3$ (B) $|a+b|\geqslant 3$ (C) $|a-b|\leqslant 3$ (D) $|a-b|\geqslant 3$

10. 如图, 用四种不同颜色给图中的 $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ 六个点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且图中每条线段的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有 ( )



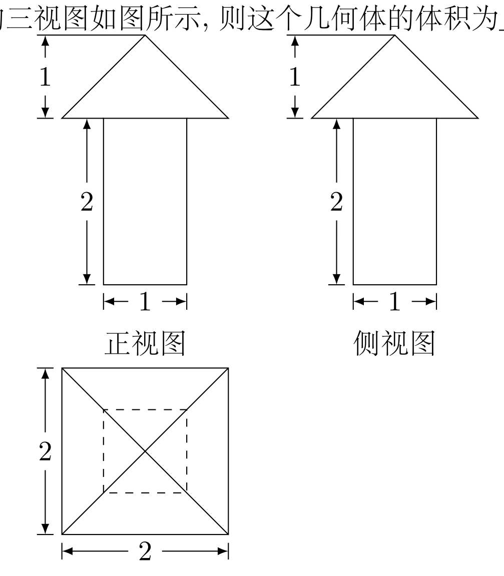
(A) 288 种 (B) 264 种 (C) 240 种 (D) 168 种

二、填空题

11. 甲、乙两人在 10 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图, 中间一列的数字表示零件个数的十位数, 两边的数字表示零件个数的个位数, 则这 10 天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为______和______.

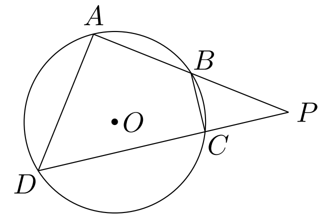
甲		乙
9 8	1	9 7 1
0 1 3 2 0	2	1 4 2 4
1 1 5	3	0 2 0

12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为______.

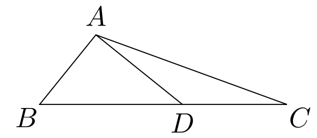


13. 已知圆 C 的圆心是直线 $\begin{cases}x=t,\\ y=1+t,\end{cases}$ (t 为参数) 与 x 轴的交点, 且圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切, 则圆 C 的方程为______.

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, 延长 AB 和 DC 相交于点 P, 若 $\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{1}{3}$, 则 $\dfrac{BC}{AD}$ 的值为______.



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD\perp AB$, $\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$______.



16. 设函数 $f(x)=x^2-1$, 对任意 $x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, $f\left(\dfrac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1\ (x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值;

(2) 若 $f(x_0)=\dfrac{6}{5}$, $x_0\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

18. 某射手每次射击击中目标的概率是 $\dfrac{2}{3}$, 且各次射击的结果互不影响.

(1) 假设这名射手射击 5 次, 求恰有 2 次击中目标的概率;

(2) 假设这名射手射击 5 次, 求有 3 次连续击中目标. 另外 2 次未击中目标的概率;

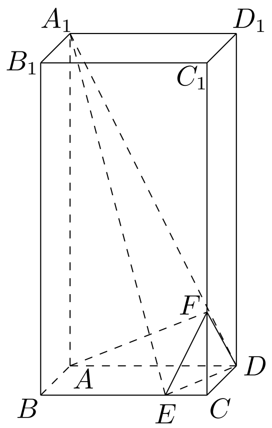
(3) 假设这名射手射击 3 次, 每次射击, 击中目标得 1 分, 未击中目标得 0 分, 在 3 次射击中, 若有 2 次连续击中, 而另外 1 次未击中, 则额外加 1 分; 若 3 次全击中, 则额外加 3 分. 记 ξ 为射手射击 3 次后的总的分数, 求 ξ 的分布列.

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E、F 分别是棱 BC、CC_1 上的点, $CF=AB=2CE$, $AB:AD:AA_1=1:2:4$.

(1) 求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值;

(2) 证明 $AF\perp$ 平面 A_1ED;

(3) 求二面角 A_1-ED-F 的正弦值.



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B. 已知点 A 的坐标为 $(-a,0)$, 点 $Q(0,y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=4$. 求 y_0 的值.

21. 已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}\ (x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 证明: 当 $x>1$ 时, $f(x)>g(x)$;

(3) 如果 $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 证明: $x_1+x_2>2$.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=0$, 且对任意 $k\in\mathbf{N}^*$. a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1} 成等差数列, 其公差为 d_k.

(1) 若 $d_k=2k$, 证明 a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} 成等比数列 $(k\in\mathbf{N}^*)$;

(2) 若对任意 $k\in\mathbf{N}^*$, a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} 成等比数列, 其公比为 q_k.

① 设 $q_1\neq 1$. 证明 $\left\{\dfrac{1}{q_k-1}\right\}$ 是等差数列;

② 若 $a_2=2$, 证明 $\dfrac{3}{2}<2n-\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2}{a_k}\leqslant 2\ (n\geqslant 2)$.