2010 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x \mid |x-1| \leqslant 2\}$, 则 $\complement_U M=$ ( )

(A) $\{x \mid -1<x<3\}$ (B) $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

(C) $\{x \mid x<-1$ 或 $x>3\}$ (D) $\{x \mid x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 3\}$

2. 已知 $\dfrac{a+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=b+\mathrm{i}\ (a,\ b \in \mathbf{R})$, 其中 i 为虚数单位, 则 $a+b=$ ( )

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 在空间, 下列命题正确的是 ( )

(A) 平行直线的平行投影重合 (B) 平行于同一直线的两个平面平行

(C) 垂直于同一平面的两个平面平行 (D) 垂直于同一平面的两条直线平行

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x)=2^x+2x+b$ (b 为常数), 则 $f(-1)=$ ( )

(A) 3 (B) 1 (C) -1 (D) -3

5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 若 $P(\xi>2)=0.023$, 则 $P(-2 \leqslant \xi \leqslant 2)=$ ( )

(A) 0.477 (B) 0.628 (C) 0.954 (D) 0.977

6. 样本中共有五个个体, 其值分别为 a, 0, 1, 2, 3. 若该样本的平均值为 1, 则样本方差为 ( )

(A) $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ (B) $\dfrac{6}{5}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

7. 由曲线 $y=x^2$, $y=x^3$ 围成的封闭图形面积为 ( )

(A) $\dfrac{1}{12}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{7}{12}$

8. 某台小型晚会由 6 个节目组成, 演出顺序有如下要求: 节目甲必须排在前两位、节目乙不能排在第一位, 节目丙必须排在最后一位, 该台晚会节目演出顺序的编排方案共有 ( )

(A) 36 种 (B) 42 种 (C) 48 种 (D) 54 种

9. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则"$a_1<a_2<a_3$"是"数列 $\{a_n\}$ 是递增数列"的 ( )

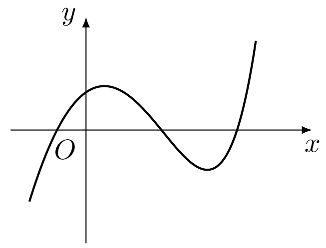
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

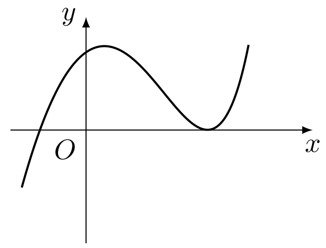
10. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2 \geqslant 0, \\ x-5y+10 \leqslant 0, \\ x+y-8 \leqslant 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z=3x-4y$ 的最大值和最小值分别为 ( )

(A) 3, -11 (B) -3, -11 (C) 11, -3 (D) 11, 3

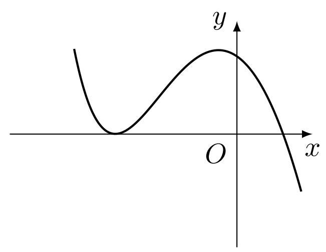
11. 函数 $y=2^x-x^2$ 的图象大致是 ( )



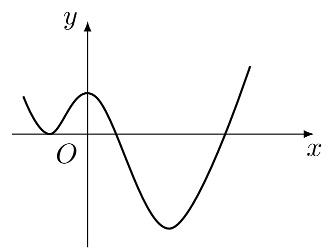
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 定义平面向量之间的一种运算"$\odot$"如下: 对任意的 $\boldsymbol{a}=(m,n)$, $\boldsymbol{b}=(p,q)$. 令 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$. 下面说法错误的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, 则 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$

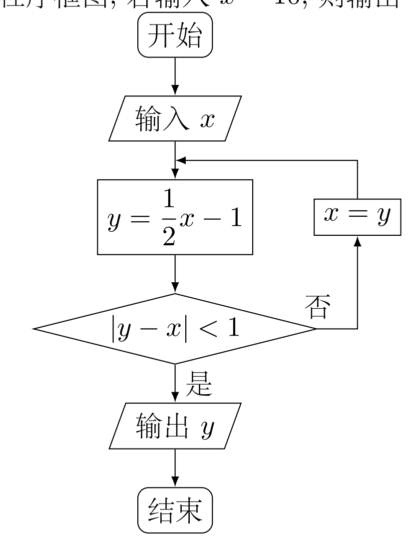
(B) $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$

(C) 对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$, 有 $(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})$

(D) $(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

二、填空题

13. 执行如图所示的程序框图, 若输入 $x=10$, 则输出 y 的值为______.



14. 若对任意 $x>0$, $\dfrac{x}{x^2+3x+1} \leqslant a$ 恒成立, 则 a 的取值范围是______.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $a=\sqrt{2}$, $b=2$, $\sin B+\cos B=\sqrt{2}$, 则角 A 的大小为______.

16. 已知圆 C 过点 $(1,0)$, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 直线 l: $y=x-1$ 被圆 C 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则过圆心且与直线 l 垂直的直线的方程为______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\cos^2 x\cos\varphi-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)$ $(0<\varphi<\pi)$, 其图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 φ 的值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3=7$, $a_5+a_7=26$. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 求 a_n 及 S_n;

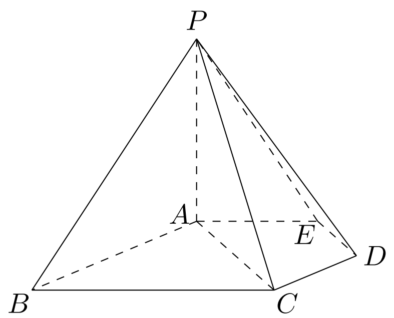
(2) 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCDE$, $AB\parallel CD$, $AC\parallel ED$, $AE\parallel BC$, $\angle ABC=45^\circ$, $AB=2\sqrt{2}$, $BC=2AE=4$, 三角形 PAB 是等腰三角形.

(1) 求证: 平面 $PCD\perp$ 平面 PAC;

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的大小;

(3) 求四棱锥 $P-ACDE$ 的体积.



20. 某学校举行知识竞赛, 第一轮选拔共设有 A、B、C、D 四个问题, 规则如下:

① 每位参加者计分器的初始分均为 10 分, 答对问题 A、B、C、D 分别加 1 分、2 分、3 分、6 分, 答错任一题减 2 分;

② 每回答一题, 计分器显示累计分数, 当累计分数小于 8 分时, 答题结束, 淘汰出局; 当累计分数大于或等于 14 分时, 答题结束, 进入下一轮; 当答完四题, 累计分数仍不足 14 分时, 答题结束, 淘汰出局;

③ 每位参加者按问题 A、B、C、D 顺序作答, 直至答题结束.

假设甲同学对问题 A、B、C、D 回答正确的概率依次为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$, 且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1) 求甲同学能进入下一轮的概率;

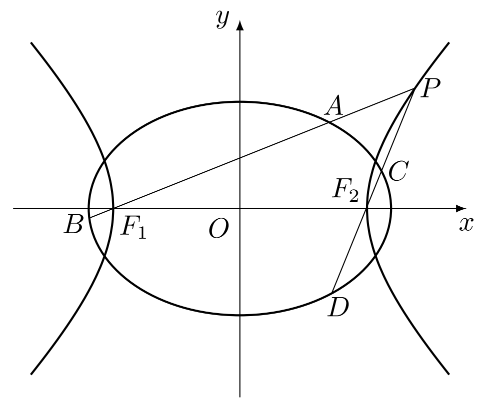
(2) 用 ξ 表示甲同学本轮答题结束时答题的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$.

21. 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 以该椭圆上的点和椭圆的左、右焦点 F_1,F_2 为顶点的三角形的周长为 $4\left(\sqrt{2}+1\right)$. 一等轴双曲线的顶点是该椭圆的焦点, 设 P 为该双曲线上异于顶点的任一点, 直线 PF_1 和 PF_2 与椭圆的交点分别为 A、B 和 C、D.

(1) 求椭圆和双曲线的标准方程;

(2) 设直线 PF_1、PF_2 的斜率分别为 k_1、k_2, 证明: $k_1\cdot k_2=1$;

(3) 是否存在常数 λ, 使得 $|AB|+|CD|=\lambda|AB|\cdot|CD|$ 恒成立? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



22. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1\ (a\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x)=x^2-2bx+4$, 当 $a=\frac{1}{4}$ 时, 若对任意 $x_1\in(0,2)$, 存在 $x_2\in[1,2]$, 使 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$, 求实数 b 的取值范围.