2010 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\mid -2<x<1\}$, $B=\{x\mid 0<x<2\}$, 则集合 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{x\mid -1<x<1\}$　(B) $\{x\mid -2<x<1\}$

(C) $\{x\mid -2<x<2\}$　(D) $\{x\mid 0<x<1\}$

2. 若复数 $z_1=1+\mathrm{i}$, $z_2=3-\mathrm{i}$, 则 $z_1\cdot z_2=$ ( )

(A) $4+2\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $2+2\mathrm{i}$　(D) $3+\mathrm{i}$

3. 若函数 $f(x)=3^x+3^{-x}$ 与 $g(x)=3^x-3^{-x}$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 则 ( )

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数　(B) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数　(D) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $a_2\cdot a_3=2a_1$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\dfrac{5}{4}$, 则 $S_5=$ ( )

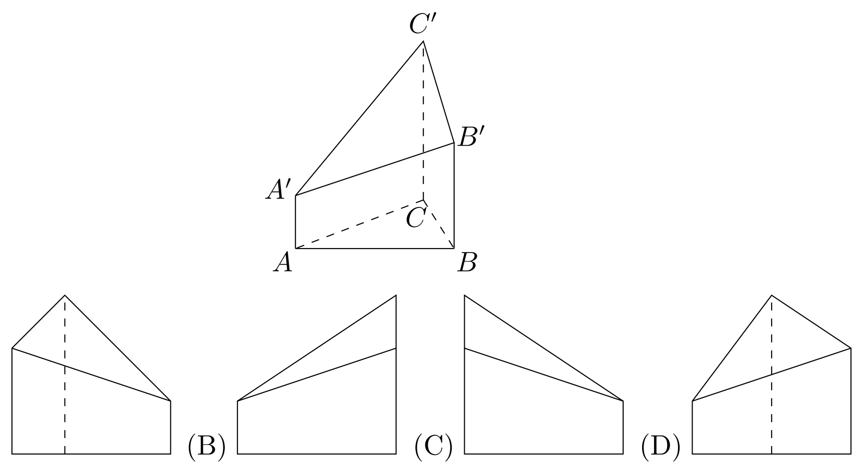
(A) 35　(B) 33　(C) 31　(D) 29

5. “$m<\dfrac{1}{4}$”是“一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有实数解”的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 充分必要条件

(C) 必要非充分条件　(D) 非充分非必要条件

6. 如图, $\triangle ABC$ 为正三角形, $AA'\parallel BB'\parallel CC'$, $CC'\perp$ 平面 ABC, 且 $3AA'=\dfrac{3}{2}BB'=CC'=AB$, 则多面体 $ABC-A'B'C'$ 的正视图 (也称主视图) 是 ( )



7. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3,1)$, 且 $P(2\leqslant X\leqslant 4)=0.6826$, 则 $P(X>4)=$ ( )

(A) 0.1588　(B) 0.1587　(C) 0.1586　(D) 0.1585

8. 为了迎接 2010 年广州亚运会, 某大楼安装 5 个彩灯, 它们闪亮的顺序不固定, 每个彩灯闪亮只能是红、橙、黄、绿、蓝中的一种颜色, 且这 5 个彩灯所闪亮的颜色各不相同. 记这 5 个彩灯有序地闪亮一次为一个闪烁, 在每个闪烁中, 每秒钟有且仅有一个彩灯闪亮, 而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 秒. 如果要实现所有不同的闪烁, 那么需要的时间至少是 ( )

(A) 1205 秒　(B) 1200 秒　(C) 1195 秒　(D) 1190 秒

二、填空题

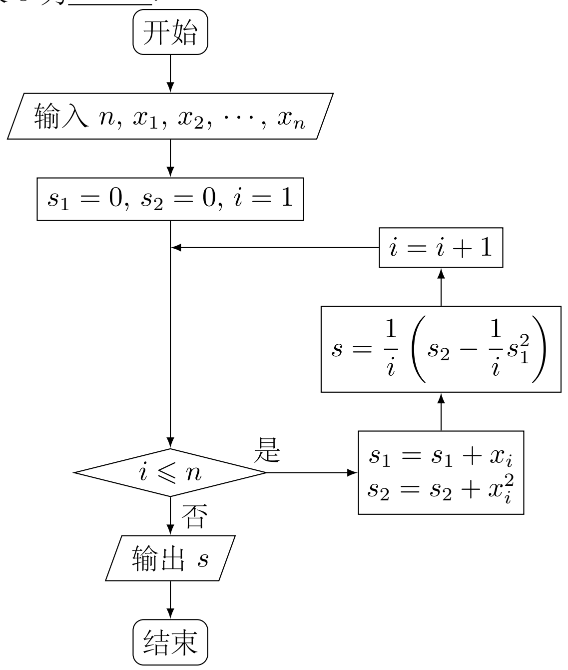
9. 函数 $f(x)=\lg(x-2)$ 的定义域是______.

10. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,x)$, $\boldsymbol{b}=(1,2,1)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,1)$, 满足条件 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(2\boldsymbol{b})=-2$, 则 $x=$______.

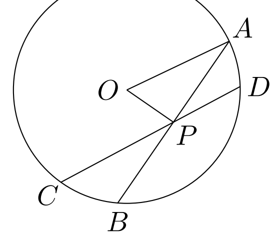
11. 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边. 若 $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $A+C=2B$, 则 $\sin C=$______.

12. 若圆心在 x 轴上、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆 O 位于 y 轴左侧, 且与直线 $x+y=0$ 相切, 则圆 O 的方程是______.

13. 某城市缺水问题比较突出, 为了制定节水管理办法, 对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查, 其中 n 位居民的月均用水量分别为 $x_1,\cdots,x_n$ (单位: 吨). 根据如图所示的程序框图, 若 $n=2$, 且 x_1, x_2 分别为 1, 2, 则输出的结果 s 为______.



14. 如图, AB, CD 是半径为 a 的圆 O 的两条弦, 它们相交于 AB 的中点 P, $PD=\dfrac{2a}{3}$, $\angle OAP=30^\circ$, 则 $CP=$______.



15. 在极坐标系 (ρ,θ) $(0\leqslant\theta<2\pi)$ 中, 曲线 $\rho=2\sin\theta$ 与 $\rho\cos\theta=-1$ 的交点的极坐标为______.

三、解答题

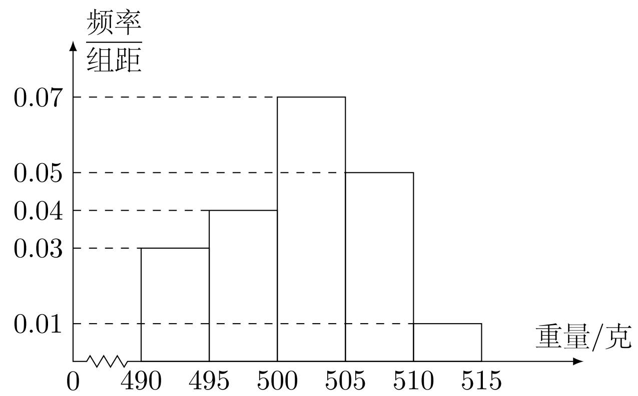
16. 已知函数 $f(x)=A\sin(3x+\varphi)$ $(A>0,\ x\in(-\infty,+\infty)$, $0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时取得最大值 4.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的解析式;

(3) 若 $f\left(\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{12}{5}$, 求 $\sin\alpha$.

17. 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况, 随机抽取该流水线上的 40 件产品作为样本称出它们的重量 (单位: 克), 重量的分组区间为 $(490,495]$, $(495,500]$, $\cdots$, $(510,515]$, 由此得到样本的频率分布直方图, 如图所示.



(1) 根据频率分布直方图, 求重量超过 505 克的产品数量;

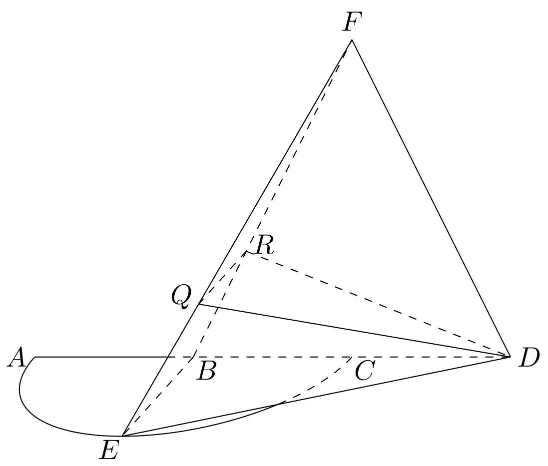
(2) 在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件, 设 Y 为重量超过 505 克的产品数量, 求 Y 的分布列;

(3) 从流水线上任取 5 件产品, 求恰有 2 件产品合格的重量超过 505 克的概率.

18. 如图, $\widehat{AEC}$ 是半径为 a 的半圆, AC 为直径, 点 E 为 $\widehat{AC}$ 的中点, 点 B 和点 C 为线段 AD 的三等分点, 平面 AEC 外一点 F 满足 $FB=FD=\sqrt{5}a$, $EF=\sqrt{6}a$.

(1) 证明: $EB\perp FD$;

(2) 已知点 Q, R 分别为线段 FE, FB 上的点, 使得 $FQ=\dfrac{2}{3}FE$, $FR=\dfrac{2}{3}FB$, 求平面 BED 与平面 RQD 所成二面角的正弦值.



19. 某营养师要为某个儿童预定午餐和晚餐. 已知一个单位的午餐含 12 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 6 个单位的维生素 C; 一个单位的晚餐含 8 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 10 个单位的维生素 C. 另外, 该儿童这两餐需要的营养中至少含 64 个单位的碳水化合物, 42 个单位的蛋白质和 54 个单位的维生素 C. 如果一个单位的午餐、晚餐的费用分别是 2.5 元和 4 元, 那么要满足上述的营养要求, 并且花费最少, 应当为该儿童分别预订多少个单位的午餐和晚餐?

20. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 点 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_1,-y_1)$ 是双曲线上不同的两个动点.

(1) 求直线 A_1P 与 A_2Q 交点的轨迹 E 的方程;

(2) 若过点 $H(0,h)$ $(h>1)$ 的两条直线 l_1 和 l_2 与轨迹 E 都只有一个交点, 且 $l_1\perp l_2$, 求 h 的值.

21. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是平面直角坐标系 xOy 上的两点, 现定义由点 A 到点 B 的一种折线距离 $\rho(A,B)$ 为 $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. 对于平面 xOy 上给定的不同的两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

(1) 若点 $C(x,y)$ 是平面 xOy 上的点, 试证明 $\rho(A,C)+\rho(C,B)\geqslant\rho(A,B)$;

(2) 在平面 xOy 上是否存在点 $C(x,y)$, 同时满足① $\rho(A,C)+\rho(C,B)=\rho(A,B)$; ② $\rho(A,C)=\rho(C,B)$. 若存在, 请求出所有符合条件的点; 若不存在, 请予以证明.