# 2010 普通高等学校招生考试 (全国卷理)

## 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x \mid |x| \leqslant 2,\ x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid \sqrt{x} \leqslant 4,\ x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B=$ ( )

(A) $(0,2)$ (B) $[0,2]$ (C) $\{0,\ 2\}$ (D) $\{0,\ 1,\ 2\}$

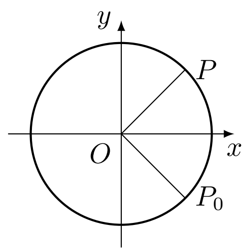
2. 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}$, $\bar{z}$ 是 $z$ 的共轭复数, 则 $z \cdot \bar{z}=$ ( )

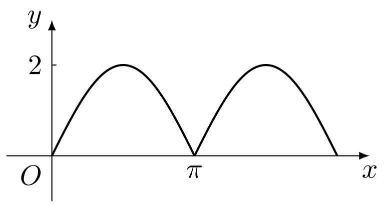
(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

3. 曲线 $y=\dfrac{x}{x+2}$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线方程为 ( )

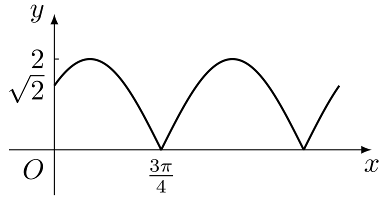
(A) $y=2x+1$ (B) $y=2x-1$ (C) $y=-2x-3$ (D) $y=-2x-2$

4. 如图, 质点 $P$ 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, 角速度为 1, 那么点 $P$ 到 $x$ 轴的距离 $d$ 关于时间 $t$ 的函数图象大致为 ( )

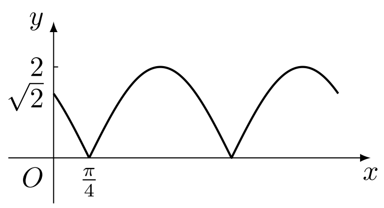


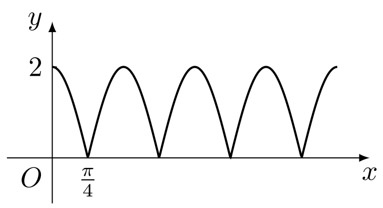

(A)




(B)




(C)




(D)

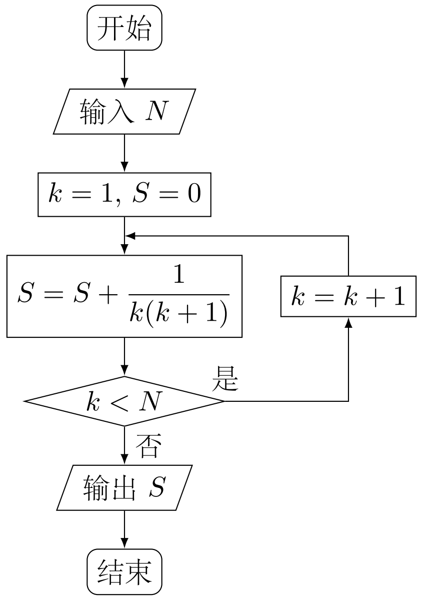
5. 已知命题 $p_1$: 函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为增函数; $p_2$: 函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 为减函数. 则在命题 $q_1$: $p_1 \vee p_2$, $q_2$: $p_1 \wedge p_2$, $q_3$: $(\neg p_1) \vee p_2$ 和 $q_4$: $p_1 \wedge (\neg p_2)$ 中, 真命题是 ( )

(A) $q_1, q_3$ (B) $q_2, q_3$ (C) $q_1, q_4$ (D) $q_2, q_4$

6. 某种种子每粒发芽的概率都为 0.9, 现播种了 1000 粒, 对于没有发芽的种子, 每粒需再补种 2 粒, 补种的种子数记为 $X$, 则 $X$ 的数学期望为 ( )

(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400

7. 如果执行如图所示的框图, 输入 $N=5$, 则输出的数等于 ( )




(A) $\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $\dfrac{6}{5}$ (D) $\dfrac{5}{6}$

8. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^3-8\ (x \geqslant 0)$, 则 $\{x \mid f(x-2)>0\}=$ ( )

(A) $\{x \mid x<-2 \text{ 或 } x>4\}$ (B) $\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>4\}$

(C) $\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>6\}$ (D) $\{x \mid x<-2 \text{ 或 } x>2\}$

9. 若 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$, $\alpha$ 是第三象限的角, 则 $\dfrac{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) $-2$

10. 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有棱长都为 $a$, 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ( )

(A) $\pi a^2$ (B) $\dfrac{7}{3}\pi a^2$ (C) $\dfrac{11}{3}\pi a^2$ (D) $5\pi a^2$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |\lg x|, & 0<x \leqslant 10, \\ -\dfrac{1}{2}x+6, & x>10, \end{cases}$ 若 $a$, $b$, $c$ 互不相等, 且 $f(a)=f(b)=f(c)$, 则 $abc$ 的取值范围是 ( )

(A) $(1,10)$ (B) $(5,6)$ (C) $(10,12)$ (D) $(20,24)$

12. 已知双曲线 $E$ 的中心为原点, $F(3,0)$ 是 $E$ 的焦点, 过 $F$ 的直线 $l$ 与 $E$ 相交于 $A$, $B$ 两点, 且 $AB$ 的中点为 $N(-12,-15)$, 则 $E$ 的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

## 二、填空题

13. 设 $y=f(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 且恒有 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 可以用随机模拟方法近似计算积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 先产生两组 (每组 $N$ 个) 区间 $[0,1]$ 上的均匀随机数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_N$, 由此得到 $N$ 个点 $(x_i, y_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$, 再数出其中满足 $y_i \leqslant f(x_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 的点数 $N_1$, 那么由随机模拟方法可得积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值为______.

14. 正视图为一个三角形的几何体可以是______. (写出三种)

15. 过点 $A(4,1)$ 的圆 $C$ 与直线 $x-y-1=0$ 相切于点 $B(2,1)$, 则圆 $C$ 的方程为______.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $D$ 为边 $BC$ 上一点, $BD=\dfrac{1}{2}DC$, $\angle ADB=120^\circ$, $AD=2$, 若 $\triangle ADC$ 的面积为 $3-\sqrt{3}$, 则 $\angle BAC=$______.

## 三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}-a_n=3 \cdot 2^{2n-1}$.

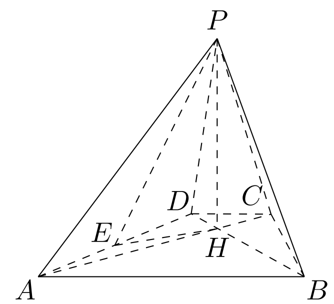
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n=na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

18. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, 垂足为 $H$, $PH$ 是四棱锥的高, $E$ 为 $AD$ 中点.

(1) 证明: $PE \perp BC$;

(2) 若 $\angle APB=\angle ADB=60^\circ$, 求直线 $PA$ 与平面 $PEH$ 所成角的正弦值.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

| 性别 / 是否需要志愿者 | 男 | 女 |
|---|---|---|
| 需要 | 40 | 30 |
| 不需要 | 160 | 270 |

(1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附:

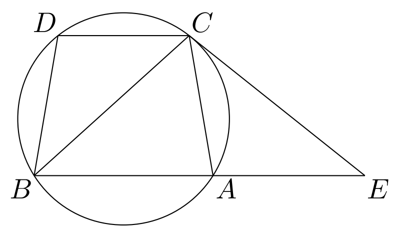
| $P\left(K^2 \geqslant k\right)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 设 $F_1$, $F_2$ 分别是椭圆 $E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, 过 $F_1$ 且斜率为 1 的直线 $l$ 与 $E$ 相交于 $A$、$B$ 两点, 且 $|AF_2|$, $|AB|$, $|BF_2|$ 成等差数列.
(1) 求 $E$ 的离心率;
(2) 设点 $P(0,-1)$ 满足 $|PA|=|PB|$, 求 $E$ 的方程.

21. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-ax^2$.
(1) 若 $a=0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$, 求 $a$ 的取值范围.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\overparen{AC}=\overparen{BD}$, 过 $C$ 点的圆的切线与 $BA$ 的延长线交于 $E$ 点, 证明:
(1) $\angle ACE=\angle BCD$;
(2) $BC^2=BE\cdot CD$.




23. 已知直线 $C_1$: $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ ($t$ 为参数), 圆 $C_2$: $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ ($\theta$ 为参数).
(1) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求 $C_1$ 与 $C_2$ 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 $O$ 作 $C_1$ 的垂线, 垂足为 $A$, $P$ 为 $OA$ 的中点, 当 $\alpha$ 变化时, 求点 $P$ 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

24. 设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.
(1) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x)\leqslant ax$ 的解集非空, 求 $a$ 的取值范围.