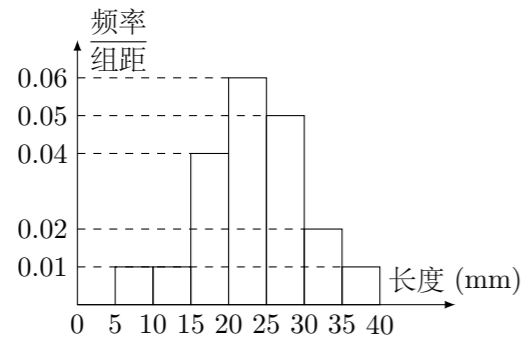


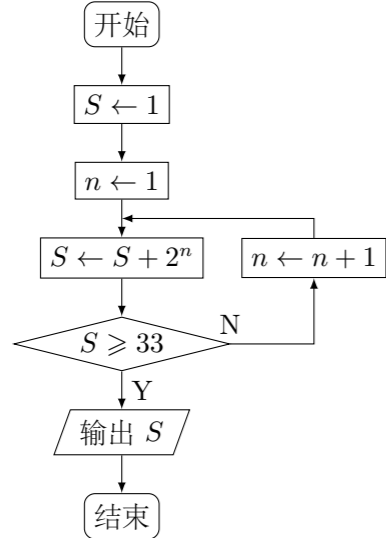
2010 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 3\}$, $B = \{a+2, a^2+4\}$, $A \cap B = \{3\}$, 则实数 $a =$ _____.
2. 设复数 z 满足 $z(2-3i) = 6+4i$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 的模为_____.
3. 盒子中有大小相同的 3 只白球, 1 只黑球, 若从中随机地摸出两只球, 则它们颜色不同的概率是_____.
4. 某棉纺厂为了了解一批棉花的质量, 从中随机抽取了 100 根棉花纤维的长度 (棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标), 所得数据都在区间 $[5, 40]$ 中, 其频率分布直方图如图所示, 则其抽样的 100 根中, 有_____根棉花纤维的长度小于 20 mm.



5. 设函数 $f(x) = x(e^x + ae^{-x})$, $x \in \mathbf{R}$ 是偶函数, 则实数 a 的值为_____.
6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 上一点 M 的横坐标为 3, 则点 M 到此双曲线的右焦点的距离为_____.
7. 如图是一个算法流程图, 则输出 S 的值是_____.



8. 函数 $y = x^2$ ($x > 0$) 的图象在点 (a_k, a_k^2) 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 a_{k+1} , 其中 $k \in \mathbf{N}^*$. 若 $a_1 = 16$, 则 $a_1 + a_3 + a_5$ 的值是_____.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x - 5y + c = 0$ 的距离为 1, 则实数 c 的取值范围是_____.

10. 定义在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $y = 6 \cos x$ 的图象与 $y = 5 \tan x$ 的图象的交于点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 P_1 , 直线 PP_1 与 $y = \sin x$ 的图象交于点 P_2 , 则线段 P_1P_2 的长为_____.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$ 则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是_____.

12. 设实数 x, y 满足 $3 \leq xy^2 \leq 8, 4 \leq \frac{x^2}{y} \leq 9$, 则 $\frac{x^3}{y^4}$ 的最大值是_____.

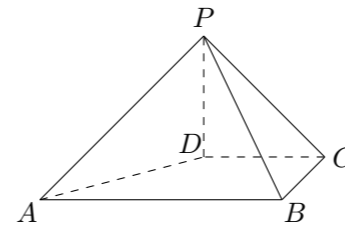
13. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 6 \cos C$, 则 $\frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B}$ 的值是_____.

14. 将边长为 1 m 的正三角形薄铁皮沿一条平行于某边的直线剪成两块, 其中一块是梯形, 记 $s = \frac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$, 则 s 的最小值是_____.

二、解答题

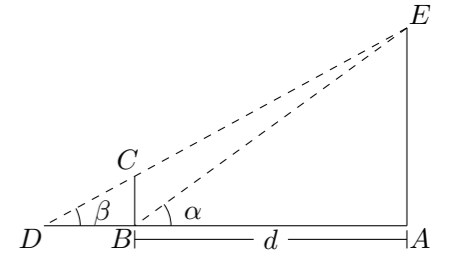
15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1, -2)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(-2, -1)$.
 - (1) 求以线段 AB, AC 为邻边的平行四边形的两条对角线的长;
 - (2) 设实数 t 满足 $(\overrightarrow{AB} - t\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, 求 t 的值.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = DC = BC = 1$, $AB = 2, AB \parallel DC, \angle BCD = 90^\circ$.
 - (1) 求证: $PC \perp BC$;
 - (2) 求点 A 到平面 PBC 的距离.



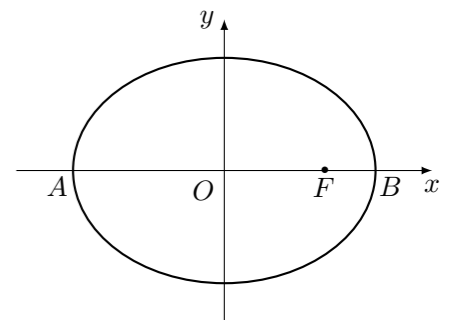
17. 某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m). 如示意图, 垂直放置的标杆 BC 的高度 $h = 4$ m, 仰角 $\angle ABE = \alpha, \angle ADE = \beta$.

- (1) 该小组已经测得一组 α, β 的值, 算出了 $\tan \alpha = 1.24, \tan \beta = 1.20$, 请据此算出 H 的值;
- (2) 该小组分析若干测得的数据后, 发现适当调整标杆到电视塔的距离 d (单位: m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精度. 若电视塔实际高度为 125 m, 试问 d 为多少时, $\alpha - \beta$ 最大.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左、右顶点为 A, B , 右焦点为 F . 设过点 $T(t, m)$ 的直线 TA, TB 与此椭圆分别交于点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 其中 $m > 0, y_1 > 0, y_2 < 0$.

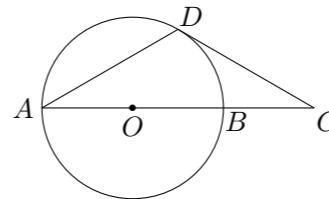
- (1) 设动点 P 满足 $PF^2 - PB^2 = 4$, 求点 P 的轨迹;
- (2) 设 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{3}$, 求点 T 的坐标;
- (3) 设 $t = 9$, 求证: 直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (其坐标与 m 无关).



19. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $2a_2 = a_1 + a_3$, 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 d 的等差数列.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (用 n, d 表示);
- (2) 设 c 为实数, 对满足 $m+n=3k$ 且 $m \neq n$ 的任意正整数 m, n, k , 不等式 $S_m + S_n > cS_k$ 都成立. 求证: c 的最大值为 $\frac{9}{2}$.

21. 四选二.

【A】 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, D 为 $\odot O$ 上一点, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 延长线于点 C . 若 $DA = DC$, 求证: $AB = 2BC$.



【B】 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(0,0), B(-2,0), C(-2,1)$, 设 k 为非零实数. 矩阵 $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 点 A, B, C 在矩阵 MN 对应的变换下得到的点分别为 A_1, B_1, C_1 , $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍, 求实数 k 的值.

20. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1, +\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$. 如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$.
- (1) 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{b+2}{x+1}$ ($x > 1$), 其中 b 为实数.
- ① 求证: 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$;
- ② 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
- (2) 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$, 给定 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, $x_1 < x_2$, 设 m 为实数. $\alpha = mx_1 + (1-m)x_2$, $\beta = (1-m)x_1 + mx_2$, 且 $\alpha > 1, \beta > 1$, 若 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 m 的取值范围.

22. 某工厂生产甲、乙两种产品. 甲产品的一等品率为 80%, 二等品率为 20%; 乙产品的一等品率为 90%, 二等品率为 10%. 生产 1 件甲产品, 若是一等品则获得利润 4 万元, 若是二等品则亏损 1 万元; 生产 1 件乙产品, 若是一等品则获得利润 6 万元, 若是二等品则亏损 2 万元. 设生产各种产品相互独立.
- (1) 记 X (单位: 万元) 为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润, 求 X 的分布列;
- (2) 求生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率.

23. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数.

- (1) 求证: $\cos A$ 是有理数;
- (2) 求证: 对任意正整数 n , $\cos nA$ 是有理数.

【D】 设 a, b 是非负实数, 求证: $a^3 + b^3 \geq \sqrt{ab}(a^2 + b^2)$.