2010 普通高等学校招生考试 (江西卷理)

一、选择题

1. 已知 $(x+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=y$, 则实数 x, y 分别为 ( )

(A) $x=-1$, $y=1$　　(B) $x=-1$, $y=2$

(C) $x=1$, $y=1$　　(D) $x=1$, $y=2$

2. 已知集合 $A=\{x \mid |x|\leqslant 1,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y \mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$　　(B) $\{x \mid x\geqslant 0\}$

(C) $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$　　(D) $\varnothing$

3. 不等式 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right|>\dfrac{x-2}{x}$ 的解集是 ( )

(A) $(0,2)$　　(B) $(-\infty,0)$

(C) $(2,+\infty)$　　(D) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)=$ ( )

(A) $\dfrac{5}{3}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 不存在

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_8=4$, 函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)$, 则 $f'(0)=$ ( )

(A) 2^6　　(B) 2^9　　(C) 2^{12}　　(D) 2^{15}

6. $(2-\sqrt{x})^8$ 展开式中不含 x^4 项的系数的和为 ( )

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

7. E, F 是等腰直角 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的三等分点, 则 $\tan\angle ECF=$ ( )

(A) $\dfrac{16}{27}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{3}{4}$

8. 直线 $y=kx+3$ 与圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ 相交于 M, N 两点, 若 $|MN|\geqslant 2\sqrt{3}$, 则 k 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-\dfrac{3}{4},0\right]$　　(B) $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]\cup[0,+\infty)$

(C) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　(D) $\left[-\dfrac{2}{3},0\right]$

9. 给出下列三个命题:

① 函数 $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 与 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 是同一函数;

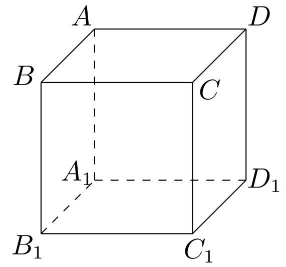
② 若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则函数 $y=f(2x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2}g(x)$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称;

③ 若奇函数 $f(x)$ 对定义域内任意 x 都有 $f(x)=f(2-x)$, 则 $f(x)$ 为周期函数.

其中真命题是 ( )

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②③　　(D) ②

10. 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作直线 l, 使 l 与棱 AB, AD, AA_1 所成的角都相等, 这样的直线 l 可以作 ( )



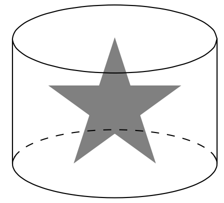
(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

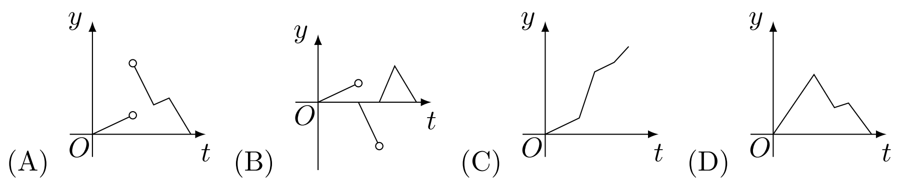
11. 一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币, 国王怀疑大臣作弊, 他用两种方法来检测. 方法一: 在 10 箱中各任意抽查一枚; 方法二: 在 5 箱中各任意抽查两枚. 国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别记为 p_1 和 p_2. 则 ( )

(A) $p_1=p_2$　　(B) $p_1<p_2$

(C) $p_1>p_2$　　(D) 以上三种情况都有可能

12. 如图, 一个正五角星薄片 (其对称轴与水面垂直) 匀速地升出水面, 记 t 时刻五角星露出水面部分的图形面积为 $S(t)$ $(S(0)=0)$, 则导函数 $y=S'(t)$ 的图象大致为 ( )





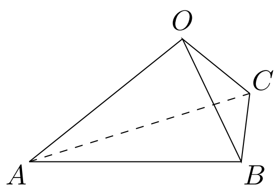
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$______.

14. 将 6 位志愿者分成 4 组, 其中两个组各 2 人, 另两个组各 1 人, 分赴世博会的四个不同场馆服务, 不同的分配方案有______种. (用数字作答)

15. 点 $A(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{32}=1$ 的右支上, 若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$, 则 $x_0=$______.

16. 如图, 在三棱锥 $O-ABC$ 中, 三条棱 OA, OB, OC 两两垂直, 且 $OA>OB>OC$, 分别经过三条棱 OA, OB, OC 作一个截面平分三棱锥的体积, 截面面积依次为 S_1, S_2, S_3, 则 S_1, S_2, S_3 的大小关系为______.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=(1+\cot x)\sin^2 x+m\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 当 $m=0$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的取值范围;

(2) 当 $\tan\alpha=2$ 时, $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$, 求 m 的值.

18. 某迷宫有三个通道, 进入迷宫的每个人都要经过一个智能门. 首次到达此门, 系统会随机 (即等可能) 为你打开一个通道. 若是 1 号通道, 则需要 1 小时走出迷宫; 若是 2 号、3 号通道, 则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门. 再次到达智能门时, 系统会随机打开一个你未到过的通道, 直至走出迷宫为止. 令 ξ 表示走出迷宫所需的时间.

(1) 求 ξ 的分布列;

(2) 求 ξ 的数学期望.

19. 设函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)+ax\ (a>0)$.

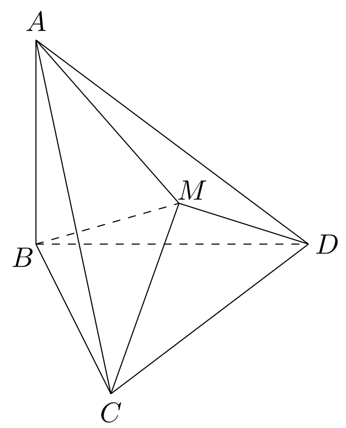
(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $\dfrac{1}{2}$, 求 a 的值.

20. 如图, $\triangle BCD$ 与 $\triangle MCD$ 都是边长为 2 的正三角形, 平面 $MCD\perp$ 平面 BCD, $AB\perp$ 平面 BCD, $AB=2\sqrt{3}$.

(1) 求点 A 到平面 MBC 的距离;

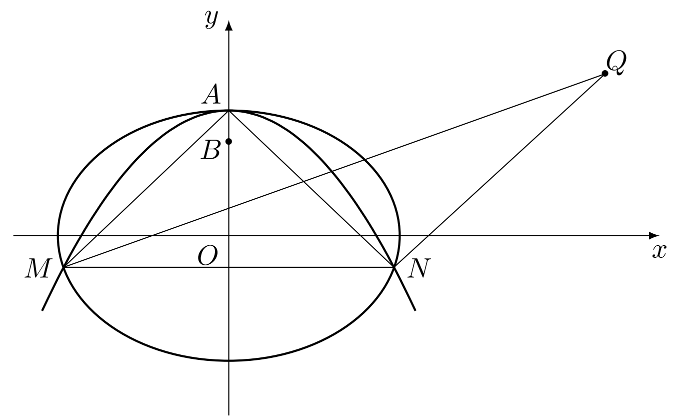
(2) 求平面 ACM 与平面 BCD 所成二面角的正弦值.



21. 设椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, 抛物线 C_2: $x^2+by=b^2$.

(1) 若 C_2 经过 C_1 的两个焦点, 求 C_1 的离心率;

(2) 设 $A(0,b)$, $Q\left(3\sqrt{3},\dfrac{5}{4}b\right)$, 又 M、N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点, 若 $\triangle AMN$ 的垂心为 $B\left(0,\dfrac{3}{4}b\right)$, 且 $\triangle QMN$ 的重心在 C_2 上, 求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的方程.



22. 证明以下命题:

(1) 对任一正整数 a, 都存在正整数 b, c $(b<c)$, 使得 a^2, b^2, c^2 成等差数列;

(2) 存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$, 其边长 a_n, b_n, c_n 为正整数且 a_n^2, b_n^2, c_n^2 成等差数列.