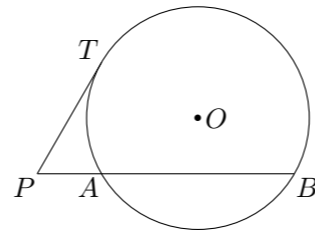


2010 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)



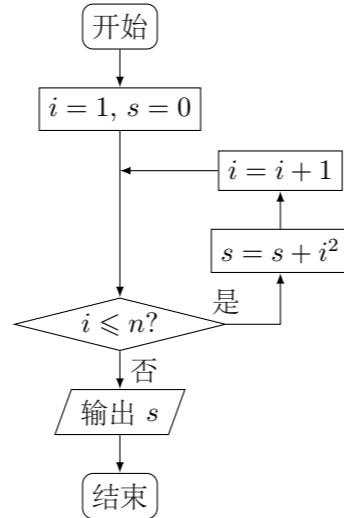
一、选择题

- 已知集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{2, 3, 4\}$, 则 ()
 - $M \subseteq N$
 - $N \subseteq M$
 - $M \cap N = \{2, 3\}$
 - $M \cup N = \{1, 4\}$
- 下列命题中是假命题的是 ()
 - $\forall x \in \mathbf{R}, 2^{x-1} > 0$
 - $\forall x \in \mathbf{N}^*, (x-1)^2 > 0$
 - $\exists x \in \mathbf{R}, \lg x < 1$
 - $\exists x \in \mathbf{R}, \tan x = 2$
- 极坐标方程 $\rho = \cos \theta$ 和参数方程 $\begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases}$ (t 为参数) 所表示的图形分别是 ()
 - 圆、直线
 - 直线、圆
 - 圆、圆
 - 直线、直线
- 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于 ()
 - 16
 - 8
 - 8
 - 16
- $\int_2^4 \frac{1}{x} dx$ 等于 ()
 - $-2 \ln 2$
 - $2 \ln 2$
 - $-\ln 2$
 - $\ln 2$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 若 $\angle C = 120^\circ$, $c = \sqrt{2}a$, 则 ()
 - $a > b$
 - $a < b$
 - $a = b$
 - a 与 b 的大小关系不能确定
- 在某种信息传输过程中, 用 4 个数字的一个排列 (数字允许重复) 表示一个信息, 不同排列表示不同信息, 若所用数字只有 0 和 1, 则与信息 0110 至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为 ()
 - 10
 - 11
 - 12
 - 15
- 用 $\min\{a, b\}$ 表示 a, b 两数中的最小值. 若函数 $f(x) = \min\{|x|, |x+t|\}$ 的图象关于直线 $x = -\frac{1}{2}$ 对称, 则 t 的值为 ()
 - 2
 - 2
 - 1
 - 1

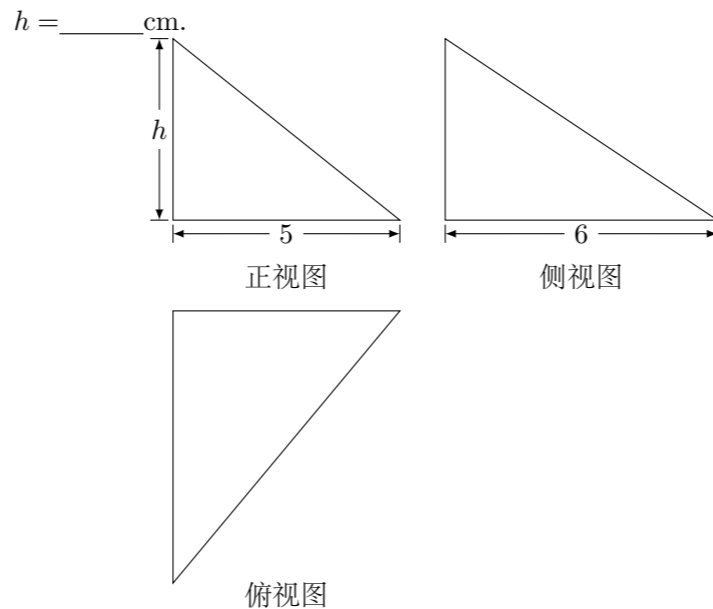
二、填空题

- 已知一种材料的最佳加入量在 110 g 到 210 g 之间. 若用 0.618 法安排实验, 则第一次试点的加入量可以是_____g.
- 如图所示, 过 $\odot O$ 外一点 P 作一条直线与 $\odot O$ 交于 A, B 两点. 已知 $PA = 2$, 点 P 到 $\odot O$ 的切线长 $PT = 4$, 则弦 AB 的长为_____.

- 在区间 $[-1, 2]$ 上随机取一个数 x , 则 $|x| \leq 1$ 的概率为_____.
- 如图是求 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$ 的值的程序框图, 则正整数 $n =$ _____.



- 图中的三个直角三角形是一个体积为 20 cm^3 的几何体的三视图, 则 $h =$ _____cm.



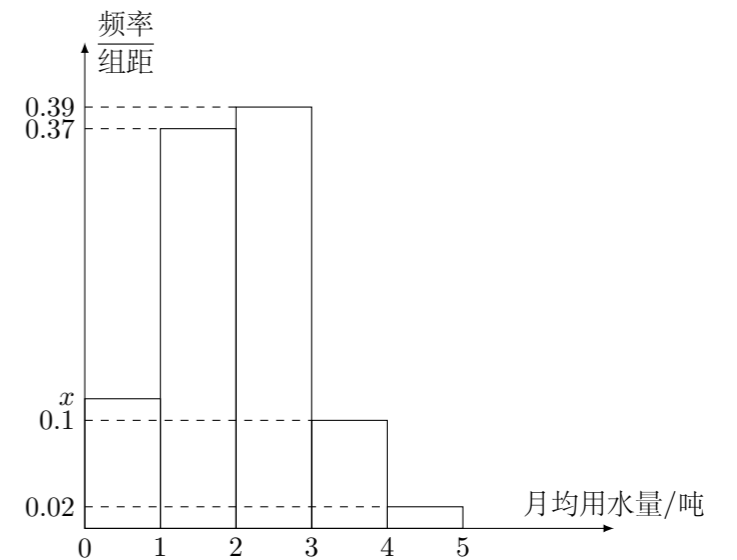
- 过抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点作斜率为 1 的直线与该抛物线交于 A, B 两点, A, B 在 x 轴上的正射影分别为 D, C . 若梯形 $ABCD$ 的面积为 $12\sqrt{2}$, 则 $p =$ _____.
- 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 只有有限个正整数 m 使得 $a_m < n$ 成立, 记这样的 m 的个数为 $(a_n)^*$, 则得到一个新数列 $\{(a_n)^*\}$. 例如, 若数列 $\{a_n\}$ 是 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, 则数列 $\{(a_n)^*\}$ 是 $0, 1, 2, \dots, n-1, \dots$. 已知对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = n^2$, 则 $(a_5)^* =$ _____, $((a_n)^*)^* =$ _____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x$.

- 求函数 $f(x)$ 的最大值;
- 求函数 $f(x)$ 的零点的集合.

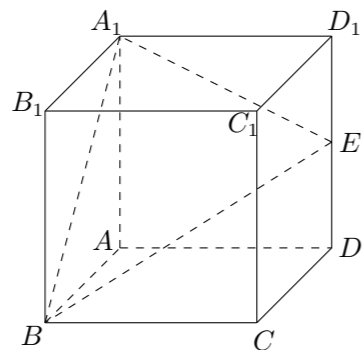
- 如图, 是某城市通过抽样得到的居民某年的月均用水量 (单位: 吨) 的频率分布直方图.



- 求直方图中 x 的值;
- 若将频率视为概率, 从这个城市随机抽取 3 位居民 (看作有放回的抽样), 求月均用水量在 3 至 4 吨的居民数 X 的分布列和数学期望.

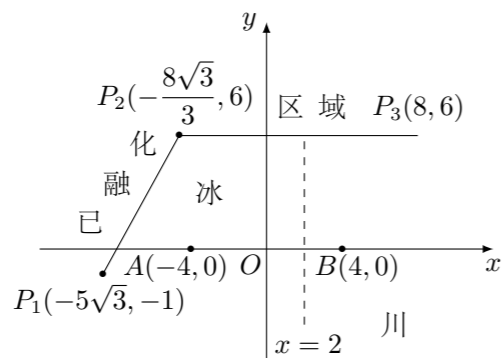
18. 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 DD_1 的中点.

- (1) 求直线 BE 和平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值;
 (2) 在棱 C_1D_1 上是否存在一点 F , 使 $B_1F \parallel$ 平面 A_1BE ? 证明你的结论.



19. 为了考察冰川的融化状况, 一支科考队在某冰川上相距 8 km 的 A, B 两点各建一个考察基地. 视冰川面为平面形, 以过 A, B 两点的直线为 x 轴, 线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系 (如图). 在直线 $x = 2$ 的右侧, 考察范围为到点 B 的距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ km 的区域; 在直线 $x = 2$ 的左侧, 考察范围为到 A, B 两点的距离之和不超过 $4\sqrt{5}$ km 的区域.

- (1) 求考察区域边界曲线的方程;
 (2) 如图所示, 设线段 P_1P_2, P_2P_3 是冰川的部分边界线 (不考虑其他边界), 当冰川融化时, 边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动, 第一年移动 0.2 km, 以后每年移动的距离为前一年的 2 倍. 求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间.



20. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbf{R}$), 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f'(x) \leq f(x)$.

- (1) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq (x+c)^2$;
 (2) 若对满足题设条件的任意 b, c , 不等式 $f(c) - f(b) \leq M(c^2 - b^2)$ 恒成立, 求 M 的最小值.

21. 数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 中, $a_1 = a$, a_{n+1} 是函数 $f_n(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3a_n + n^2)x^2 + 3n^2a_nx$ 的极小值点.
 (1) 当 $a = 0$ 时, 求通项 a_n ;
 (2) 是否存在 a , 使数列 $\{a_n\}$ 是等比数列? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.