

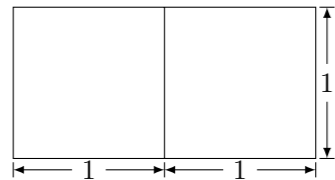
2010 普通高等学校招生考试 (福建卷文)

一、选择题

1. 若集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x > 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
 (A) $\{x | 2 < x \leq 3\}$ (B) $\{x | x \geq 1\}$
 (C) $\{x | 2 \leq x < 3\}$ (D) $\{x | x > 2\}$

2. 计算 $1 - 2\sin^2 22.5^\circ$ 的结果等于 ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示, 则其侧面积等于 ()



- (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 6

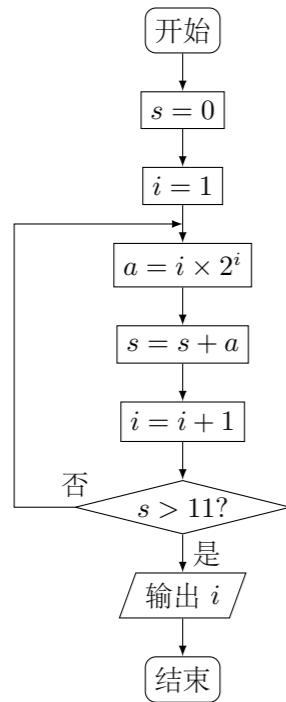
4. i 是虚数单位, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ 等于 ()

- (A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1

5. 若 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x - 2y + 3 \geq 0, \\ y \geq x, \end{cases}$ 则 $z = x + 2y$ 的最小值等于 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 9

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 i 值等于 ()



- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

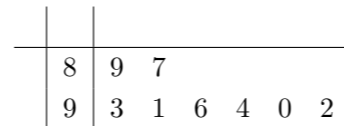
7. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0, \\ -2 + \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 的零点个数为 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

8. 若向量 $\mathbf{a} = (x, 3)$ ($x \in \mathbf{R}$), 则“ $x = 4$ ”是“ $|\mathbf{a}| = 5$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 若某校高一年级 8 个班参加合唱比赛的得分如茎叶图所示, 则这组数据的中位数和平均数分别是 ()



- (A) 91.5 和 91.5 (B) 91.5 和 92 (C) 91 和 91.5 (D) 92 和 92

10. 将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 若所得图象与原图象重合, 则 ω 的值不可能等于 ()

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

11. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 的最大值为 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8

12. 设非空集合 $S = \{x | m \leq x \leq l\}$ 满足: 当 $x \in S$ 时, 有 $x^2 \in S$. 给出如下三个命题:

- ① 若 $m = 1$, 则 $S = \{1\}$;
 ② 若 $m = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{4} \leq l \leq 1$;
 ③ 若 $l = \frac{1}{2}$, 则 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 0$.

- 其中正确命题的个数是 ()

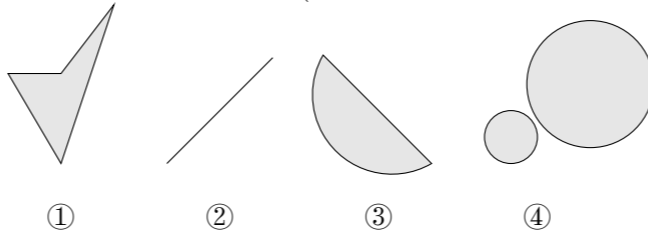
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题

13. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则 b 等于_____.

14. 将容量为 n 的样本中的数据分成 6 组, 绘制频率分布直方图. 若第一组至第六组数据的频率之比为 $2:3:4:6:4:1$, 且前三组数据的频数之和等于 27, 则 n 等于_____.

15. 对于平面上的点集 Ω , 如果连接 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω , 则称 Ω 为平面上的凸集, 给出平面上 4 个点集的图形如图所示 (阴影区域及其边界), 其中为凸集的是_____. (写出所有凸集相应图形的序号)



16. 观察下列等式:

- ① $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;
 ② $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$;
 ③ $\cos 6\alpha = 32\cos^6 \alpha - 48\cos^4 \alpha + 18\cos^2 \alpha - 1$;
 ④ $\cos 8\alpha = 128\cos^8 \alpha - 256\cos^6 \alpha + 160\cos^4 \alpha - 32\cos^2 \alpha + 1$;
 ⑤ $\cos 10\alpha = m\cos^{10} \alpha - 1280\cos^8 \alpha + 1120\cos^6 \alpha + n\cos^4 \alpha + p\cos^2 \alpha - 1$.
 可以推测, $m - n + p =$ _____.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, 前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 以及前 n 项和 S_n ;
 (2) 若 $S_1, t(S_1 + S_2), 3(S_2 + S_3)$ 成等差数列, 求实数 t 的值.

18. 设平面向量 $\mathbf{a}_m = (m, 1)$, $\mathbf{b}_n = (2, n)$, 其中 $m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- (1) 请列出有序数组 (m, n) 的所有可能结果;
 (2) 记“使得 $\mathbf{a}_m \perp (\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_n)$ 成立的 (m, n) ”为事件 A , 求事件 A 发生的概率.

19. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 过点 $A(1, -2)$.

(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其准线方程;

(2) 是否存在平行于 OA (O 为坐标原点) 的直线 l , 使得直线 l 与抛物线 C 有公共点, 且直线 OA 与 l 的距离等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

21. 某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时, 轮船位于港口 O 北偏西 30° 且与该港口相距 20 海里的 A 处, 并以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶, 经过 t 小时与轮船相遇.

(1) 若希望相遇时小艇的航行距离最小, 则小艇航行速度的大小应为多少?

(2) 为保证小艇在 30 分钟内 (含 30 分钟) 能与轮船相遇, 试确定小艇航行速度的最小值;

(3) 是否存在 v , 使得小艇以 v 海里/小时的航行速度行驶, 总能有两种不同的航行方向与轮船相遇? 若存在, 试确定 v 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + b$ 的图象在点 $P(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 3x - 2$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 设 $g(x) = f(x) + \frac{m}{x-1}$ 是 $[2, +\infty)$ 上的增函数.

① 求实数 m 的最大值;

② 当 m 取最大值时, 是否存在点 Q , 使得过点 Q 的直线若能与曲线 $y = g(x)$ 围成两个封闭图形, 则这两个封闭图形的面积总相等? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, H 分别是棱 A_1B_1, D_1C_1 上的点 (点 E 与 B_1 不重合), 且 $EH \parallel A_1D_1$. 过 EH 的平面与棱 BB_1, CC_1 相交, 交点分别为 F, G .

(1) 证明: $AD \parallel$ 平面 $EFGH$;

(2) 设 $AB = 2AA_1 = 2a$. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内随机选取一点. 记该点取自几何体 $A_1ABFE - D_1DCGH$ 内的概率为 p , 当点 E, F 分别在棱 A_1B_1, B_1B 上运动且满足 $EF = a$ 时, 求 p 的最小值.

