2010 普通高等学校招生考试 (福建卷理)

一、选择题

1. 计算 $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$ 的结果等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 以抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为圆心, 且过坐标原点的圆的方程为 ( )

(A) $x^2+y^2+2x=0$　(B) $x^2+y^2+x=0$

(C) $x^2+y^2-x=0$　(D) $x^2+y^2-2x=0$

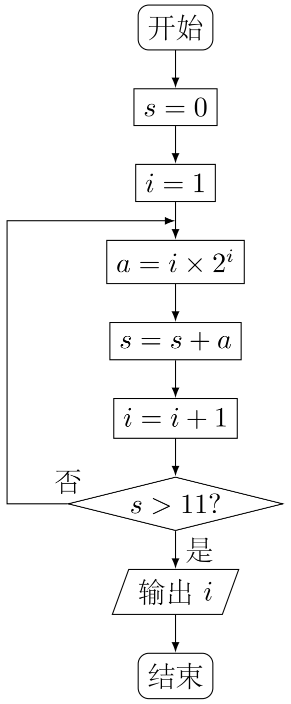
3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=-11$, $a_4+a_6=-6$, 则当 S_n 取最小值时, n 等于 ( )

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

4. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & x \leqslant 0, \\ -2+\ln x, & x>0, \end{cases}$ 的零点个数为 ( )

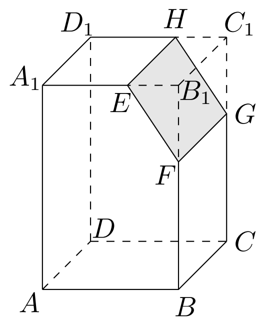
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 i 值等于 ( )



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

6. 如图, 若 Ω 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $EFGH$ 截去几何体 $EFGHB_1C_1$ 后得到的几何体, 其中 E 为线段 A_1B_1 上异于 B_1 的点, F 为线段 BB_1 上异于 B_1 的点, 且 $EH \parallel A_1D_1$, 则下列结论中不正确的是( )



(A) $EH \parallel FG$　(B) 四边形 $EFGH$ 是矩形

(C) Ω 是棱柱　(D) Ω 是棱台

7. 若点 O 和点 $F(-2,0)$ 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的中心和左焦点, 点 P 为双曲线右支上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的取值范围为 ( )

(A) $\left[3-2\sqrt{3},+\infty\right)$　(B) $\left[3+2\sqrt{3},+\infty\right)$

(C) $\left[-\dfrac{7}{4},+\infty\right)$　(D) $\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$

8. 设不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x-2y+3 \geqslant 0, \\ y \geqslant x \end{cases}$ 所表示的平面区域是 Ω_1, 平面区域 Ω_2 与 Ω_1 关于直线 $3x-4y-9=0$ 对称. 对于 Ω_1 中的任意点 A 与 Ω_2 中的任意点 B, $|AB|$ 的最小值等于 ( )

(A) $\dfrac{28}{5}$　(B) 4　(C) $\dfrac{12}{5}$　(D) 2

9. 对于复数 a, b, c, d, 若集合 $S=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 具有性质"对任意 x, $y\in S$, 必有 $xy \in S$", 则当 $\begin{cases} a=1, \\ b^2=1, \\ c^2=b \end{cases}$ 时, $b+c+d$ 等于 ( )

(A) 1　(B) -1　(C) 0　(D) i

10. 对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在函数 $h(x)=kx+b$ (k, b 为常数), 对任给的正数 m, 存在相应的 $x_0\in D$, 使得当 $x\in D$ 且 $x>x_0$ 时, 总有 $\begin{cases} 0<f(x)-h(x)<m, \\ 0<h(x)-g(x)<m, \end{cases}$ 则称直线 l: $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的"分渐近线". 给出定义域均为 $D=\{x \mid x>1\}$ 的四组函数如下:

① $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$;
② $f(x)=10^{-x}+2$, $g(x)=\dfrac{2x-3}{x}$;
③ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x\ln x+1}{\ln x}$;
④ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$, $g(x)=2(x-1-\mathrm{e}^{-x})$.

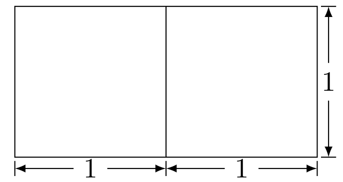
其中, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 存在"分渐近线"的是 ( )

(A) ①④　(B) ②③　(C) ②④　(D) ③④

二、填空题

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若公比 $q=4$, 且前 3 项之和等于 21, 则该数列的通项公式为 $a_n=$______.

12. 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示, 则其表面积等于______.



13. 某次知识竞赛规则如下: 在主办方预设的 5 个问题中, 选手若能连续正确回答出两个问题, 即停止答题, 晋级下一轮. 假设某选手正确回答每个问题的概率都是 0.8, 且每个问题的回答结果相互独立, 则该选手恰好回答了 4 个问题就晋级下一轮的概率等于______.

14. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)\ (\omega>0)$ 和 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的图象的对称轴完全相同. 若 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则 $f(x)$ 的取值范围是______.

15. 已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足, (1) 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 恒有 $f(2x)=2f(x)$ 成立; (2) 当 $x\in(1,2]$ 时, $f(x)=2-x$, 给出结论如下:
① 对任意 $m\in\mathbf{Z}$, 有 $f(2^m)=0$;
② 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$;
③ 存在 $n\in\mathbf{Z}$, 使得 $f(2^n+1)=9$;
④ "函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递减"的充要条件是"存在 $k\in\mathbf{Z}$, 使得 $(a,b)\subseteq\left(2^k,2^{k+1}\right)$".
其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题

16. 设 S 是不等式 $x^2-x-6\leqslant 0$ 的解集, 整数 m, $n\in S$.
(1) 记使得"$m+n=0$ 成立的有序数组 (m,n)"为事件 A, 试列举 A 包含的基本事件;
(2) 设 $\xi=m^2$, 求 ξ 的分布列及其数学期望 $E\xi$.

17. 已知中心在坐标原点 O 的椭圆 C 经过点 $A(2,3)$, 且点 $F(2,0)$ 为其右焦点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在平行于 OA 的直线 l, 使得直线 l 与椭圆 C 有公共点, 且直线 OA 与 l 的距离等于 4? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

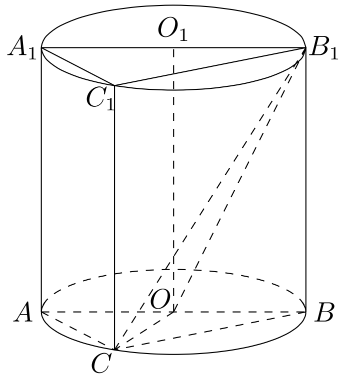
18. 如图, 圆柱 OO_1 内有一个三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 三棱柱的底面为圆柱底面的内接三角形, 且 AB 是圆 O 直径.

(1) 证明: 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1;

(2) 设 $AB = AA_1$, 在圆柱 OO_1 内随机选取一点, 记该点取自于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内的概率为 p.

① 当点 C 在圆周上运动时, 求 p 的最大值;

② 记平面 A_1ACC_1 与平面 B_1OC 所成的角为 θ $(0^\circ < \theta \leqslant 90^\circ)$, 当 p 取最大值时, 求 $\cos\theta$ 的值.



19. 某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时, 轮船位于港口 O 北偏西 30° 且与该港口相距 20 海里的 A 处, 并以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶, 经过 t 小时与轮船相遇.

(1) 若希望相遇时小艇的航行距离最小, 则小艇航行速度的大小应为多少?

(2) 假设小艇的最高航行速度只能达到 30 海里/小时, 试设计航行方案 (即确定航行方向与航行速度的大小), 使得小艇能以最短时间与轮船相遇, 并说明理由.

20. (1) 已知函数 $f(x) = x^3 - x$, 其图象记为曲线 C.

① 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

② 证明: 若对于任意非零实数 x_1, 曲线 C 与其在点 $P_1(x_1, f(x_1))$ 处的切线交于另一点 $P_2(x_2, f(x_2))$, 曲线 C 与其在点 $P_2(x_2, f(x_2))$ 处的切线交于另一点 $P_3(x_3, f(x_3))$, 线段 P_1P_2, P_2P_3 与曲线 C 所围成封闭图形的面积分别记为 S_1, S_2, 则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 为定值;

(2) 对于一般的三次函数 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$, 请给出类似于 (1) ②的正确命题, 并予以证明.

21. 三选二.

【A】已知矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} c & 2 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{MN} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求实数 a, b, c, d 的值;

(2) 求直线 $y = 3x$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}$ 所对应的线性变换下的像的方程.

【B】在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \sqrt{5} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 圆 C 的方程为 $\rho = 2\sqrt{5}\sin\theta$.

(1) 求圆 C 的直角坐标方程;

(2) 设圆 C 与直线 l 交于点 A、B, 若点 P 的坐标为 $(3, \sqrt{5})$, 求 $|PA|+|PB|$.

【C】已知函数 $f(x) = |x-a|$.

(1) 若不等式 $f(x) \leqslant 3$ 的解集为 $\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$, 求实数 a 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $f(x) + f(x+5) \geqslant m$ 对一切实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围.