2010 普通高等学校招生考试 (辽宁卷理)

一、选择题

1. 已知 A, B 均为集合 $U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ 的子集, 且 $A\cap B=\{3\}$, $\complement_U B\cap A=\{9\}$, 则 $A=$ ( )

(A) $\{1,\ 3\}$ (B) $\{3,\ 7,\ 9\}$ (C) $\{3,\ 5,\ 9\}$ (D) $\{3,\ 9\}$

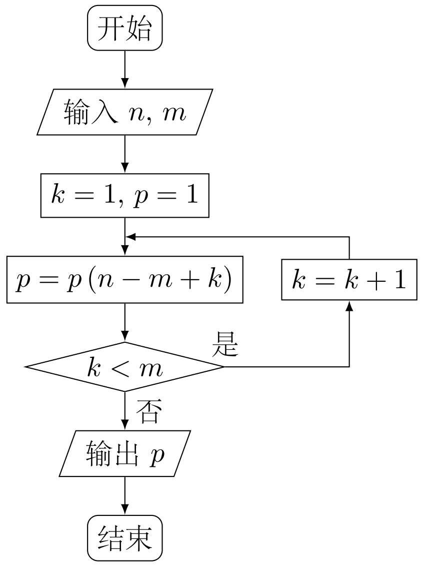
2. 设 a, b 为实数, 若复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$, 则 ( )

(A) $a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{1}{2}$ (B) $a=3, b=1$ (C) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}$ (D) $a=1, b=3$

3. 两个实习生每人加工一个零件, 加工为一等品的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$ 和 $\dfrac{3}{4}$, 两个零件是否加工为一等品相互独立, 则这两个零件中恰有一个一等品的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{5}{12}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

4. 如果执行如图所示的程序框图, 输入正整数 n, m, 满足 $n\geqslant m$, 那么输出的 p 等于 ( )



(A) C_n^{m-1} (B) A_n^{m-1} (C) C_n^{m} (D) A_n^{m}

5. 设 $\omega>0$, 函数 $y=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的图象向右平移 $\dfrac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合, 则 ω 的最小值是 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{4}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 3

6. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 为其前 n 项和. 已知 $a_2a_4=1$, $S_3=7$, 则 $S_5=$ ( )

(A) $\dfrac{15}{2}$ (B) $\dfrac{31}{4}$ (C) $\dfrac{33}{4}$ (D) $\dfrac{17}{2}$

7. 设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F, 准线为 l, P 为抛物线上一点, $PA\perp l$, A 为垂足, 如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 那么 $|PF|=$ ( )

(A) $4\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $8\sqrt{3}$ (D) 16

8. 平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于 ( )

(A) $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ (B) $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

9. 设双曲线的一个焦点为 F, 虚轴的一个端点为 B, 如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

10. 已知点 P 在曲线 $y=\dfrac{4}{\mathrm{e}^x+1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

11. 已知 $a>0$, 则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax=b$ 的充要条件是 ( )

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(B) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\geqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

(D) $\forall x\in\mathbf{R}$, $\dfrac{1}{2}ax^2-bx\leqslant\dfrac{1}{2}ax_0^2-bx_0$

12. 有四根长都为 2 的直铁条, 若再选两根长都为 a 的直铁条, 使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(0,\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (B) $(1,2\sqrt{2})$

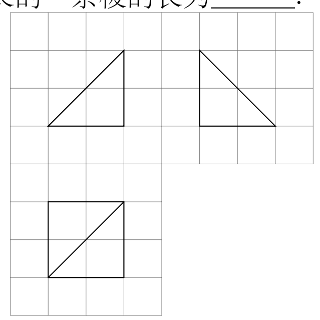
(C) $(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (D) $(0,2\sqrt{2})$

二、填空题

13. $(1+x+x^2)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为______.

14. 已知 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$, 则 $z=2x-3y$ 的取值范围是______. (答案用区间表示)

15. 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 在其上用粗线画出了某多面体的三视图, 则这个多面体最长的一条棱的长为______.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=33$, $a_{n+1}-a_n=2n$, 则 $\dfrac{a_n}{n}$ 的最小值为______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

(1) 求 A 的大小;

(2) 求 $\sin B+\sin C$ 的最大值.

18. 为了比较注射 A, B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积, 选 200 只家兔做试验, 将这 200 只家兔随机地分成两组, 每组 100 只, 其中一组注射药物 A, 另一组注射药物 B.

(1) 甲、乙是 200 只家兔中的 2 只, 求甲、乙分在不同组的概率;

(2) 下表 1 和表 2 分别是注射药物 A 和 B 后的试验结果. (疱疹面积单位: mm^2)

表 1: 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	$[60,65)$	$[65,70)$	$[70,75)$	$[75,80)$
频数	30	40	20	10

表 2: 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	$[60,65)$	$[65,70)$	$[70,75)$	$[75,80)$	$[80,85)$
频数	10	25	20	30	15

① 完成下面频率分布直方图, 并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小;

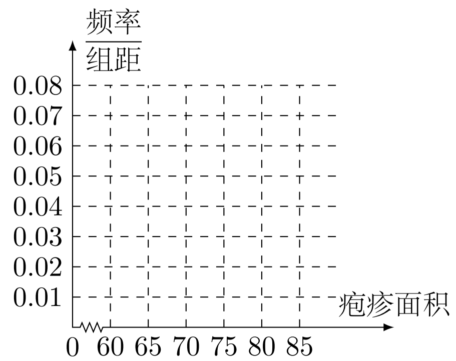


图 1: 注射药物 A

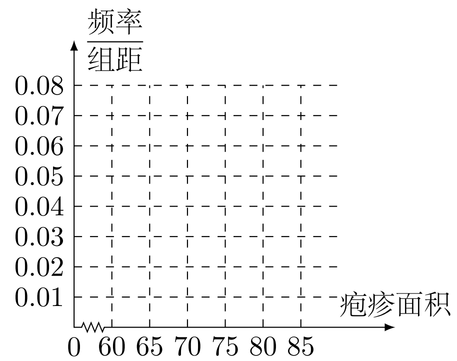


图 2: 注射药物 B

② 完成下面 2×2 列联表, 并回答能否有 99.9% 的把握认为"注射药物 A 后的疱疹面积与注射药物 B 后的疱疹面积有差异".

	疱疹面积小于 $70\ \mathrm{mm}^2$	疱疹面积不小于 $70\ \mathrm{mm}^2$	合计
注射药物 A	$a=$	$b=$	
注射药物 B	$c=$	$d=$	
合计			$n=$

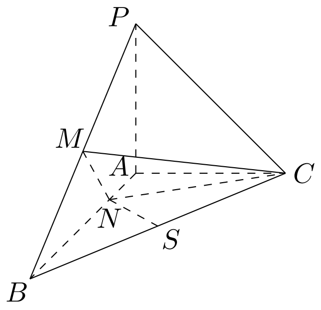
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

19. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC, $AB \perp AC$, $PA = AC = \dfrac{1}{2}AB$, N 为 AB 上一点, $AB = 4AN$, M, S 分别为 PB, BC 的中点.

(1) 证明: $CM \perp SN$;

(2) 求 SN 与平面 CMN 所成角的大小.



20. 设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的左焦点为 F, 过点 F 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 l 的倾斜角为 $60°$, $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$.

(1) 求椭圆 C 的离心率;

(2) 如果 $|AB| = \dfrac{15}{4}$, 求椭圆 C 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = (a+1)\ln x + ax^2 + 1$.

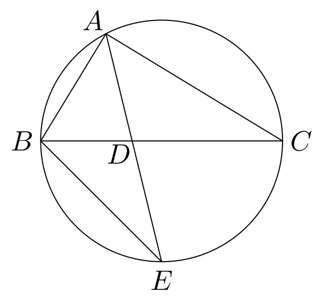
(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a < -1$, 如果对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant 4|x_1 - x_2|$, 求 a 的取值范围.

22. 如图, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 的延长线交它的外接圆于点 E.

(1) 证明: $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \dfrac{1}{2}AD \cdot AE$, 求 $\angle BAC$ 的大小.



23. 已知 P 为半圆 C: $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) 上的点, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, O 为坐标原点, 点 M 在射线 OP 上, 线段 OM 与 C 的弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的长度均为 $\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 求点 M 的极坐标;

(2) 求直线 AM 的参数方程.

24. 已知 a, b, c 均为正数, 证明: $a^2 + b^2 + c^2 + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)^2 \geqslant 6\sqrt{3}$, 并确定 a, b, c 为何值时, 等号成立.