2011 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=$______.

2. 若全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\mid x\geqslant 1\}\cup\{x\mid x\leqslant 0\}$, 则 $\complement_U A=$______.

3. 设 m 为常数, 若点 $F(0,5)$ 是双曲线 $\dfrac{y^2}{m}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 的一个焦点, 则 $m=$______.

4. 不等式 $\dfrac{x+1}{x}\leqslant 3$ 的解集为______.

5. 在极坐标系中, 直线 $\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=2$ 与直线 $\rho\cos\theta=1$ 的夹角大小为______. (结果用反三角函数值表示)

6. 在相距 2 千米的 A, B 两点处测量目标 C, 若 $\angle CAB=75^\circ$, $\angle CBA=60^\circ$, 则 A, C 两点之间的距离为______千米.

7. 若圆锥的侧面积为 2π, 底面面积为 π, 则该圆锥的体积为______.

8. 函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$ 的最大值为______.

9. 马老师从课本上抄录一个随机变量 ξ 的概率分布列如下表:

X	1	2	3
$P(\xi=x)$	?	!	?

请小牛同学计算 ξ 的数学期望, 尽管"!"处无法完全看清, 且两个"?"处字迹模糊, 但能肯定这两个"?"处的数值相同. 据此, 小牛给出了正确答案 $E\xi=$______.

10. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\{-1,\ 1,\ 2\})$ 所有可能的值中, 最大的是______.

11. 在正三角形 ABC 中, D 是 BC 上的点. 若 $AB=3$, $BD=1$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$______.

12. 随机抽取的 9 位同学中, 至少有 2 位同学在同一月份出生的概率为______. (默认每个月的天数相同, 结果精确到 0.001)

13. 设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上, 以 1 为周期的函数, 若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为______.

14. 已知点 $O(0,0)$, $Q_0(0,1)$ 和点 $R_0(3,1)$, 记 Q_0R_0 的中点为 P_1, 取 Q_0P_1 和 P_1R_0 中的一条, 记其端点为 Q_1, R_1, 使之满足 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$, 记 Q_1R_1 的中点为 P_2, 取 Q_1P_2 和 P_2R_1 中的一条, 记其端点为 Q_2, R_2, 使之满足 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$. 依次下去, 得到 P_1, P_2, $\cdots$, P_n, $\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=$______.

二、选择题

15. 若 $a,b\in\mathbf{R}$, 且 $ab>0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ( )

(A) $a^2+b^2>2ab$ (B) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

(C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$ (D) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$

16. 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的函数是 ( )

(A) $y=\ln\dfrac{1}{|x|}$ (B) $y=x^3$ (C) $y=2^{|x|}$ (D) $y=\cos x$

17. 设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是平面上给定的 5 个不同点, 则使 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}+\overrightarrow{MA_5}=\overrightarrow{0}$ 成立的点 M 的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 10

18. 设 $\{a_n\}$ 是各项为正数的无穷数列, A_i 是边长为 a_i, a_{i+1} 的矩形面积 ($i=1$, 2, $\cdots$), 则 $\{A_n\}$ 为等比数列的充要条件为 ( )

(A) $\{a_n\}$ 是等比数列

(B) a_1, a_3, $\cdots$, a_{2n-1}, $\cdots$ 或 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$ 是等比数列

(C) a_1, a_3, $\cdots$, a_{2n-1}, $\cdots$ 和 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$ 均是等比数列

(D) a_1, a_3, $\cdots$, a_{2n-1}, $\cdots$ 和 a_2, a_4, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$ 均是等比数列, 且公比相同

三、解答题

19. 已知复数 z_1 满足 $(z_1-2)(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1\cdot z_2$ 是实数, 求 z_2.

20. 已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b\cdot 3^x$, 其中常数 a, b 满足 $a\cdot b\neq 0$.

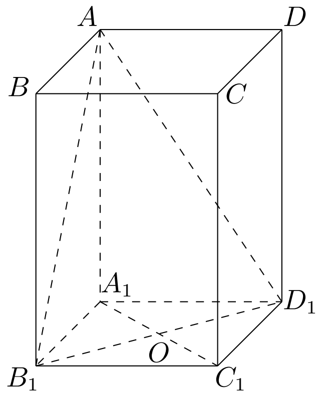
(1) 若 $a\cdot b>0$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a\cdot b<0$, 求 $f(x+1)>f(x)$ 时的 x 的取值范围.

21. 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, O_1 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点.

(1) 设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的大小为 α, 二面角 $A-B_1D_1-A_1$ 的大小为 β. 求证: $\tan\beta=\sqrt{2}\tan\alpha$;

(2) 若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{4}{3}$, 求正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=3n+6$、$b_n=2n+7$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 将集合 $\{x\mid x=a_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}\cup\{x\mid x=b_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列 $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n, \cdots$.

(1) 求 c_1, c_2, c_3, c_4;

(2) 求证: 在数列 $\{a_n\}$ 中, 但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$;

(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

23. 已知平面上的线段 l 及点 P, 在 l 上任取一点 Q, 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P,l)$.

(1) 求点 $P(1,1)$ 到线段 l: $x-y-3=0$ $(3\leqslant x\leqslant 5)$ 的距离 $d(P,l)$;

(2) 设 l 是长为 2 的线段, 求点的集合 $D=\{P\mid d(P,l)\leqslant 1\}$ 所表示的图形面积;

(3) 写出到两条线段 l_1, l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=\{P\mid d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$, 其中 $l_1=AB$, $l_2=CD$, A, B, C, D 是下列三组点中的一组. 对于下列三组点只需选做一种, 满分分别是① 2 分, ② 6 分, ③ 8 分; 若选择了多于一种情形, 则按照序号较小的解答计分.

① $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(-1,3)$, $D(-1,0)$.

② $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(-1,3)$, $D(-1,-2)$.

③ $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(0,0)$, $D(2,0)$.