

## 2011 普通高等学校招生考试 (大纲卷理)

### 一、选择题

1. 复数  $z = 1 + i$ ,  $\bar{z}$  为  $z$  的共轭复数, 则  $z\bar{z} - z - 1 =$  ( )  
 (A)  $-2i$  (B)  $-i$  (C)  $i$  (D)  $2i$
2. 函数  $y = 2\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数为 ( )  
 (A)  $y = \frac{x^2}{4}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (B)  $y = \frac{x^2}{4}$  ( $x \geq 0$ )  
 (C)  $y = 4x^2$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (D)  $y = 4x^2$  ( $x \geq 0$ )
3. 下面四个条件中, 使  $a > b$  成立的充分而不必要的条件是 ( )  
 (A)  $a > b + 1$  (B)  $a > b - 1$  (C)  $a^2 > b^2$  (D)  $a^3 > b^3$
4. 设  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1 = 1$ , 公差  $d = 2$ ,  $S_{k+2} - S_k = 24$ , 则  $k =$  ( )  
 (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5
5. 设函数  $f(x) = \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ), 将  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度后, 所得的图象与原图象重合, 则  $\omega$  的最小值等于 ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B) 3 (C) 6 (D) 9
6. 已知直二面角  $\alpha - l - \beta$ , 点  $A \in \alpha$ ,  $AC \perp l$ ,  $C$  为垂足,  $B \in \beta$ ,  $BD \perp l$ ,  $D$  为垂足. 若  $AB = 2$ ,  $AC = BD = 1$ , 则  $D$  到平面  $ABC$  的距离等于 ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  (D) 1
7. 某同学有同样的画册 2 本, 同样的集邮册 3 本, 从中取出 4 本赠送给 4 位朋友, 每位朋友 1 本, 则不同的赠送方法共有 ( )  
 (A) 4 种 (B) 10 种 (C) 18 种 (D) 20 种
8. 曲线  $y = e^{-2x} + 1$  在点  $(0, 2)$  处的切线与直线  $y = 0$  和  $y = x$  围成的三角形的面积为 ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D) 1
9. 设  $f(x)$  是周期为 2 的奇函数, 当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = 2x(1-x)$ , 则  $f\left(-\frac{5}{2}\right) =$  ( )  
 (A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{2}$
10. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 直线  $y = 2x - 4$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 则  $\cos \angle AFB =$  ( )  
 (A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{3}{5}$  (C)  $-\frac{3}{5}$  (D)  $-\frac{4}{5}$
11. 已知平面  $\alpha$  截一球面得圆  $M$ , 过圆心  $M$  且与  $\alpha$  成  $60^\circ$  二面角的平面  $\beta$  截该球面得圆  $N$ . 若该球面的半径为 4, 圆  $M$  的面积为  $4\pi$ , 则圆  $N$  的面积为 ( )  
 (A)  $7\pi$  (B)  $9\pi$  (C)  $11\pi$  (D)  $13\pi$

12. 设向量  $a, b, c$  满足  $|a| = |b| = 1$ ,  $a \cdot b = -\frac{1}{2}$ ,  $\langle a - c, b - c \rangle = 60^\circ$ , 则  $|c|$  的最大值等于 ( )  
 (A) 2 (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D) 1

### 二、填空题

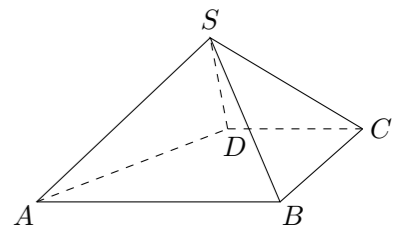
13.  $(1 - \sqrt{x})^{20}$  的二项展开式中,  $x$  的系数与  $x^9$  的系数之差为\_\_\_\_\_.
14. 已知  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_.
15. 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$  的左、右焦点, 点  $A \in C$ , 点  $M$  的坐标为  $(2, 0)$ ,  $AM$  为  $\angle F_1AF_2$  的平分线. 则  $|AF_2| =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知点  $E, F$  分别在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱  $BB_1, CC_1$  上, 且  $B_1E = 2EB, CF = 2FC_1$ , 则面  $AEF$  与面  $ABC$  所成的二面角的正切值等于\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $A - C = 90^\circ$ ,  $a + c = \sqrt{2}b$ , 求  $C$ .

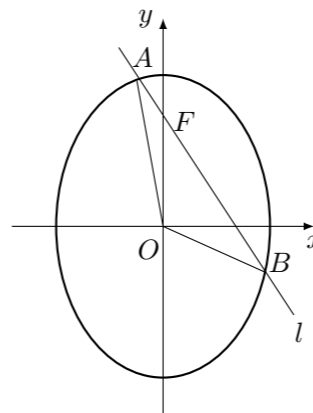
18. 根据以往统计资料, 某地车主购买甲种保险的概率为 0.5, 购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3. 设各车主购买保险相互独立.  
 (1) 求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的 1 种的概率;  
 (2)  $X$  表示该地的 100 位车主中, 甲、乙两种保险都不购买的车主数. 求  $X$  的期望.

19. 如图, 四棱锥  $S - ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $BC \perp CD$ , 侧面  $SAB$  为等边三角形.  $AB = BC = 2$ ,  $CD = SD = 1$ .  
 (1) 证明:  $SD \perp$  平面  $SAB$ ;  
 (2) 求  $AB$  与平面  $SBC$  所成角的正弦值.



20. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 0$  且  $\frac{1}{1-a_{n+1}} - \frac{1}{1-a_n} = 1$ .
- (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $b_n = \frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$ , 记  $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , 证明:  $S_n < 1$ .

21. 已知  $O$  为坐标原点,  $F$  为椭圆  $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  在  $y$  轴正半轴上的焦点, 过  $F$  且斜率为  $-\sqrt{2}$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 点  $P$  满足  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP} = \mathbf{0}$ .
- (1) 证明: 点  $P$  在  $C$  上;
- (2) 设点  $P$  关于点  $O$  的对称点为  $Q$ , 证明:  $A, P, B, Q$  四点在同一圆上.



22. (1) 设函数  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ , 证明: 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ;
- (2) 从编号 1 到 100 的 100 张卡片中每次随机抽取一张, 然后放回, 用这种方式连续抽取 20 次, 设抽得的 20 个号码互不相同的概率为  $p$ . 证明:  $p < \left(\frac{9}{10}\right)^{19} < \frac{1}{e^2}$ .