

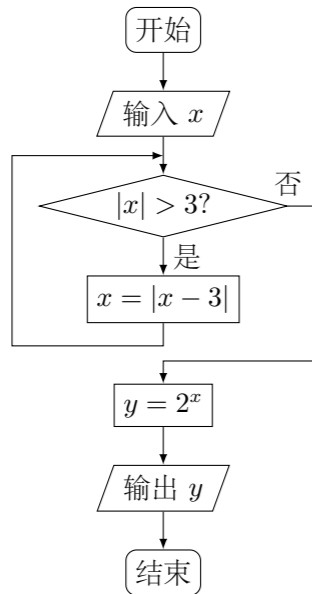
## 2011 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

### 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{1-3i}{1-i} =$  ( )  
 (A)  $2-i$  (B)  $2+i$  (C)  $-1-2i$  (D)  $-1+2i$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+y-4 \leq 0, \\ x-3y+4 \leq 0, \end{cases}$  则目标函数  $z=3x-y$  的最大值为 ( )  
 (A)  $-4$  (B)  $0$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $4$

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入  $x$  的值为  $-4$ , 则输出  $y$  的值为 ( )



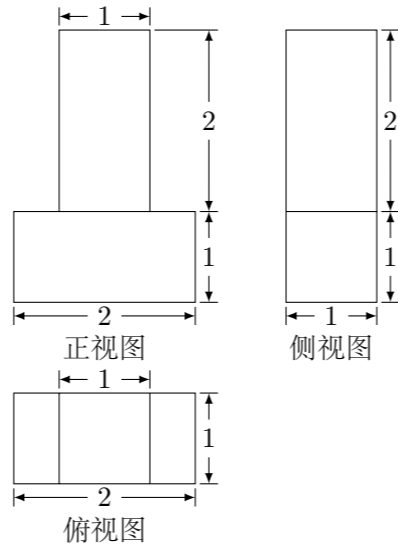
- (A)  $0.5$  (B)  $1$  (C)  $2$  (D)  $4$
4. 设集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x-2 > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$ ,  $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x(x-2) > 0\}$ , 则“ $x \in A \cup B$ ”是“ $x \in C$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
5. 已知  $a = \log_2 3.6$ ,  $b = \log_4 3.2$ ,  $c = \log_4 3.6$ , 则 ( )  
 (A)  $a > b > c$  (B)  $a > c > b$  (C)  $b > a > c$  (D)  $c > a > b$
6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左顶点与抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点的距离为  $4$ , 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为  $(-2, -1)$ , 则双曲线的焦距为 ( )  
 (A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $2\sqrt{5}$  (C)  $4\sqrt{3}$  (D)  $4\sqrt{5}$
7. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中  $\omega > 0, -\pi < \varphi \leq \pi$ . 若  $f(x)$  的最小正周期为  $6\pi$ , 且当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x)$  取得最大值, 则 ( )

- (A)  $f(x)$  在区间  $[-2\pi, 0]$  上是增函数  
 (B)  $f(x)$  在区间  $[-3\pi, -\pi]$  上是增函数  
 (C)  $f(x)$  在区间  $[3\pi, 5\pi]$  上是减函数  
 (D)  $f(x)$  在区间  $[4\pi, 6\pi]$  上是减函数

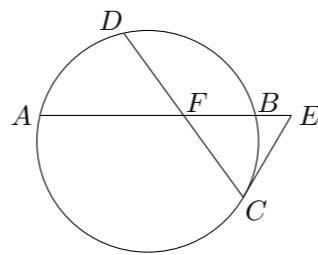
8. 对实数  $a$  和  $b$ , 定义运算“ $\otimes$ ”:  $a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1, \\ b, & a-b > 1. \end{cases}$  设函数  $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = f(x) - c$  的图象与  $x$  轴恰有两个公共点, 则实数  $c$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $(-1, 1] \cup (2, +\infty)$  (B)  $(-2, -1] \cup (1, 2]$   
 (C)  $(-\infty, -2) \cup (1, 2]$  (D)  $[-2, -1]$

### 二、填空题

9. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-1| < 2\}$ ,  $\mathbf{Z}$  为整数集, 则集合  $A \cap \mathbf{Z}$  中所有元素的和等于\_\_\_\_\_.
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则这个几何体的体积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .



11. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和,  $n \in \mathbf{N}^*$ . 若  $a_3 = 16, S_{20} = 20$ , 则  $S_{10}$  的值为\_\_\_\_\_.
12. 已知  $\log_2 a + \log_2 b \geq 1$ , 则  $3^a + 9^b$  的最小值为\_\_\_\_\_.
13. 如图, 已知圆中两条弦  $AB$  与  $CD$  相交于点  $F$ ,  $E$  是  $AB$  延长线上一点, 且  $DF = CF = \sqrt{2}$ ,  $AF : FB : BE = 4 : 2 : 1$ . 若  $CE$  与圆相切, 则  $CE$  的长为\_\_\_\_\_.



14. 已知直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC, \angle ADC = 90^\circ, AD = 2, BC = 1$ ,  $P$  是腰  $DC$  上的动点, 则  $|\vec{PA} + 3\vec{PB}|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

15. 编号分别为  $A_1, A_2, \dots, A_{16}$  名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下:

运动员编号	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	$A_9$	$A_{10}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

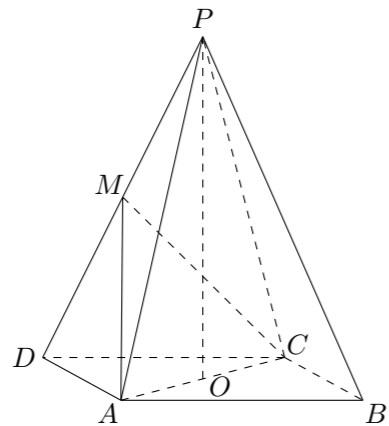
- (1) 将得分在对应区间内的人数填入相应的空格:

区间	$[10, 20)$	$[20, 30)$	$[30, 40]$
人数			

- (2) 从得分在区间  $[20, 30)$  内的运动员中随机抽取 2 人,  
 ① 用运动员编号列出所有可能的抽取结果;  
 ② 求这 2 人得分之和大于 50 的概率.

16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $B = C, 2b = \sqrt{3}a$ .  
 (1) 求  $\cos A$  的值;  
 (2) 求  $\cos\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$  的值.

17. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为平行四边形,  $\angle ADC = 45^\circ$ ,  $AD = AC = 1$ ,  $O$  为  $AC$  中点,  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PO = 2$ ,  $M$  为  $PD$  中点.
- (1) 证明:  $PB \parallel$  平面  $ACM$ ;
  - (2) 证明:  $AD \perp$  平面  $PAC$ ;
  - (3) 求直线  $AM$  与平面  $ABCD$  所成角的正切值.



19. 已知函数  $f(x) = 4x^3 + 3tx^2 - 6t^2x + t - 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中  $t \in \mathbf{R}$ .
- (1) 当  $t = 1$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
  - (2) 当  $t \neq 0$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (3) 证明: 对任意的  $t \in (0, +\infty)$ ,  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内均存在零点.

20. 已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足:  $b_{n+1}a_n + b_na_{n+1} = (-2)^n + 1$ ,  $b_n = \frac{3 + (-1)^{n-1}}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $a_1 = 2$ .
- (1) 求  $a_2, a_3$  的值;
  - (2) 设  $c_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 证明: 数列  $\{c_n\}$  是等比数列;
  - (3) 设  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 证明  $\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} + \dots + \frac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}} + \frac{S_{2n}}{a_{2n}} \leq n - \frac{1}{3}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

18. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ . 点  $P(a, b)$  满足  $|PF_2| = |F_1F_2|$ .
- (1) 求椭圆的离心率  $e$ ;
  - (2) 设直线  $PF_2$  与椭圆相交于  $A, B$  两点, 若直线  $PF_2$  与圆  $(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 16$  相交于  $M, N$  两点, 且  $|MN| = \frac{5}{8}|AB|$ , 求椭圆的方程.