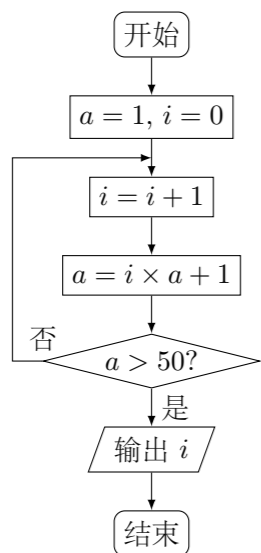


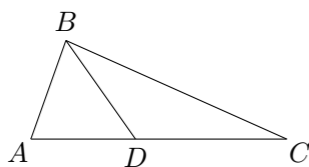
## 2011 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

### 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{1-3i}{1-i} =$  ( )  
 (A)  $2+i$  (B)  $2-i$  (C)  $-1+2i$  (D)  $-1-2i$
2. 设  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则“ $x \geq 2$  且  $y \geq 2$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 4$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 则输出  $i$  的值为 ( )



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
4. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列, 其公差为  $-2$ , 且  $a_7$  是  $a_3$  与  $a_9$  的等比中项,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则  $S_{10}$  的值为 ( )  
 (A)  $-110$  (B)  $-90$  (C)  $90$  (D)  $110$
5. 在  $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$  的二项展开式中,  $x^2$  的系数为 ( )  
 (A)  $-\frac{15}{4}$  (B)  $\frac{15}{4}$  (C)  $-\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{3}{8}$
6. 如图所示, 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是边  $AC$  上的点, 且  $AB = AD$ ,  $2AB = \sqrt{3}BD$ ,  $BC = 2BD$ , 则  $\sin C$  的值为 ( )



- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (C)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$
7. 已知  $a = 5^{\log_2 3.4}$ ,  $b = 5^{\log_4 3.6}$ ,  $c = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$ , 则 ( )

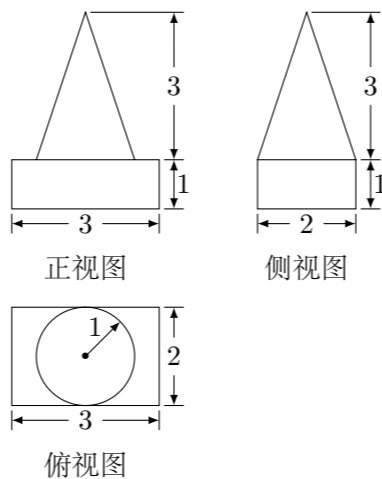
- (A)  $a > b > c$  (B)  $b > a > c$  (C)  $a > c > b$  (D)  $c > a > b$

8. 对实数  $a$  与  $b$ , 定义运算“ $\otimes$ ”:  $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1, \\ b, & a - b > 1. \end{cases}$  设函数  $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - x^2)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . 若函数  $y = f(x) - c$  的图象与  $x$  轴恰有两个公共点, 则实数  $c$  的取值范围是 ( )

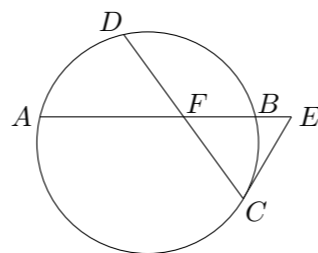
- (A)  $(-\infty, -2] \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right)$  (B)  $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$   
 (C)  $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$  (D)  $\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$

### 二、填空题

9. 一支田径队有男运动员 48 人, 女运动员 36 人, 若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本, 则抽取男运动员的人数为\_\_\_\_\_.
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则这个几何体的体积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .



11. 已知抛物线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 8t^2, \\ y = 8t, \end{cases}$  ( $t$  为参数), 若斜率为 1 的直线经过抛物线  $C$  的焦点, 且与圆  $(x-4)^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相切, 则  $r =$ \_\_\_\_\_.
12. 如图, 已知圆中两条弦  $AB$  与  $CD$  相交于点  $F$ ,  $E$  是  $AB$  延长线上一点, 且  $DF = CF = \sqrt{2}$ ,  $AF : FB : BE = 4 : 2 : 1$ . 若  $CE$  与圆相切, 则  $CE$  的长为\_\_\_\_\_.



13. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+3| + |x-4| \leq 9\}$ ,  $B = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = 4t + \frac{1}{t} - 6, t \in (0, +\infty)\right\}$ , 则集合  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
14. 已知直角梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AD = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $P$  是腰  $DC$  上的动点, 则  $|\vec{PA} + 3\vec{PB}|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

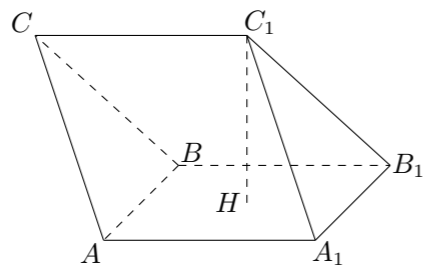
### 三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .  
 (1) 求  $f(x)$  的定义域与最小正周期;  
 (2) 设  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ , 若  $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos 2\alpha$ , 求  $\alpha$  的大小.

16. 学校游园活动有这样一个游戏项目: 甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球, 乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球, 若摸出的白球不少于 2 个, 则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)

- (1) 求在一次游戏中,  
 ① 摸出 3 个白球的概率;  
 ② 获奖的概率;  
 (2) 求在两次中获奖次数  $X$  的分布列及数学期望  $E(X)$ .

17. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $H$  是正方形  $AA_1B_1B$  的中心,  $AA_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $C_1H \perp$  平面  $AA_1B_1B$ , 且  $C_1H = \sqrt{5}$ .
- (1) 求异面直线  $AC$  与  $A_1B_1$  所成角的余弦值;
  - (2) 求二面角  $A - A_1C_1 - B_1$  的正弦值;
  - (3) 设  $N$  为棱  $B_1C_1$  的中点, 点  $M$  在平面  $AA_1B_1B$  内, 且  $MN \perp$  平面  $A_1B_1C_1$ , 求线段  $BM$  的长.



18. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P(a, b)$  ( $a > b > 0$ ) 为动点,  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点. 已知  $\triangle F_1PF_2$  为等腰三角形.
- (1) 求椭圆的离心率  $e$ ;
  - (2) 设直线  $PF_2$  与椭圆相交于  $A, B$  两点,  $M$  是直线  $PF_2$  上的点, 满足  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$ , 求点  $M$  的轨迹方程.

19. 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \ln x - ax^2$ ,  $x > 0$ . ( $f(x)$  的图象连续不断)
- (1) 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 当  $a = \frac{1}{8}$  时, 证明: 存在  $x_0 \in (2, +\infty)$ , 使  $f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ ;
  - (3) 若存在均属于区间  $[1, 3]$  的  $\alpha, \beta$ , 且  $\beta - \alpha \geq 1$ , 使  $f(\alpha) = f(\beta)$ , 证明:  $\frac{\ln 3 - \ln 2}{5} \leq a \leq \frac{\ln 2}{3}$ .

20. 已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足:  $b_n a_n + a_{n+1} + b_{n+1} a_{n+2} = 0$ ,  $b_n = \frac{3 + (-1)^n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 且  $a_1 = 2, a_2 = 4$ .
- (1) 求  $a_3, a_4, a_5$  的值;
  - (2) 设  $c_n = a_{2n-1} + a_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 证明:  $\{c_n\}$  是等比数列;
  - (3) 设  $S_k = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$ , 证明:  $\sum_{k=1}^{4n} \frac{S_k}{a_k} < \frac{7}{6}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).