2011 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 设集合 $M = \{x \mid x^2 + x - 6 < 0\}$, $N = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$, 则 $M \cap N =$ (　)

(A) $[1, 2)$　　(B) $[1, 2]$　　(C) $(2, 3]$　　(D) $[2, 3]$

2. 复数 $z = \dfrac{2 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点所在的象限为 (　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 若点 $(a, 9)$ 在函数 $y = 3^x$ 的图象上, 则 $\tan \dfrac{a\pi}{6}$ 的值为 (　)

(A) 0　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) 1　　(D) $\sqrt{3}$

4. 不等式 $|x - 5| + |x + 3| \geqslant 10$ 的解集是 (　)

(A) $[-5, 7]$　　(B) $[-4, 6]$

(C) $(-\infty, -5] \cup [7, +\infty)$　　(D) $(-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$

5. 对于函数 $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. “$y = |f(x)|$ 的图象关于 y 轴对称”是“$y = f(x)$ 是奇函数”的 (　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 若函数 $f(x) = \sin \omega x$ $(\omega > 0)$ 在区间 $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 则 $\omega =$ (　)

(A) 3　　(B) 2　　(C) $\dfrac{3}{2}$　　(D) $\dfrac{2}{3}$

7. 某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如下表:

广告费用 x (万元)	4	2	3	5
销售额 y (万元)	49	26	39	54

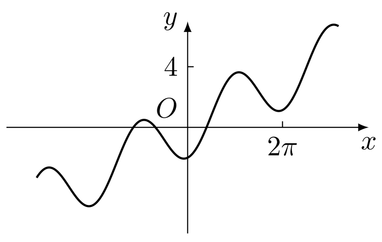
根据上表可得回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4, 据此模型预报广告费用为 6 万元时销售额为 (　)

(A) 63.6 万元　　(B) 65.5 万元　　(C) 67.7 万元　　(D) 72.0 万元

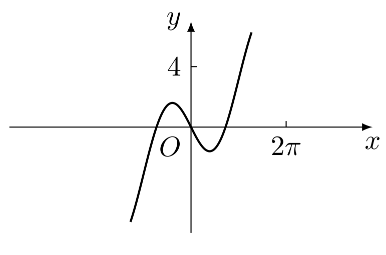
8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ 的两条渐近线均和圆 C: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相切, 且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心, 则该双曲线的方程为 (　)

(A) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$　(B) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$　(C) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{6} = 1$　(D) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{3} = 1$

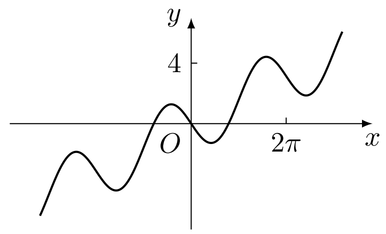
9. 函数 $y = \dfrac{x}{2} - 2\sin x$ 的图象大致是 (　)



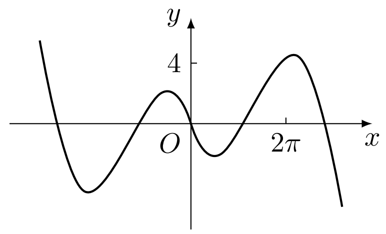
(A)



(B)



(C)

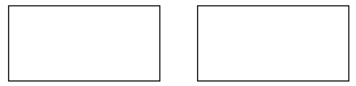


(D)

10. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上最小正周期为 2 的周期函数, 且当 $0 \leqslant x < 2$ 时, $f(x) = x^3 - x$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象在区间 $[0, 6]$ 上与 x 轴的交点的个数为 (　)

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

11. 如图是长和宽分别相等的两个矩形. 给定下列三个命题: ① 存在三棱柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图; ② 存在四棱柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图; ③ 存在圆柱, 其正 (主) 视图、俯视图如图. 其中真命题的个数是 (　)



正 (主) 视图　　俯视图

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

12. 设 A_1, A_2, A_3, A_4 是平面直角坐标系中两两不同的四点, 若 $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}$ $(\lambda \in \mathbf{R})$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \mu \overrightarrow{A_1A_2}$ $(\mu \in \mathbf{R})$, 且 $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = 2$, 则称 A_3, A_4 调和分割 A_1, A_2. 已知平面上的点 C, D 调和分割点 A, B, 则下面说法正确的是 (　)

(A) C 可能是线段 AB 的中点

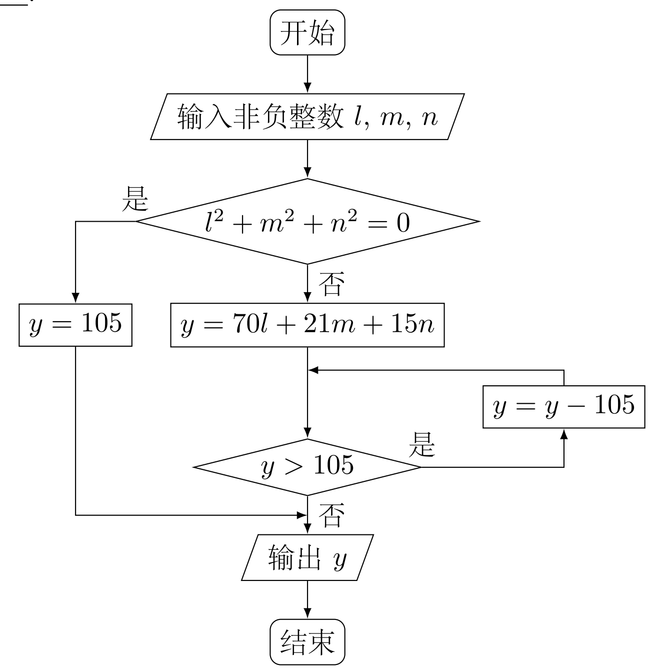
(B) D 可能是线段 AB 的中点

(C) C, D 可能同时在线段 AB 上

(D) C, D 不可能同时在线段 AB 的延长线上

二、填空题

13. 执行如图所示的程序框图, 输入 $l = 2$, $m = 3$, $n = 5$, 则输出的 y 的值是______.



14. 若 $\left(x - \dfrac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 展开式的常数项为 60, 则常数 a 的值为______.

15. 设函数 $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ $(x > 0)$, 观察:

$f_1(x) = f(x) = \dfrac{x}{x+2}$,

$f_2(x) = f(f_1(x)) = \dfrac{x}{3x+4}$,

$f_3(x) = f(f_2(x)) = \dfrac{x}{7x+8}$,

$f_4(x) = f(f_3(x)) = \dfrac{x}{15x+16}$,

$\cdots$

根据以上事实, 由归纳推理可得:

当 $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geqslant 2$ 时, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) =$______.

16. 已知函数 $f(x) = \log_a x + x - b$ $(a > 0$, 且 $a \neq 1)$. 当 $2 < a < 3 < b < 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in (n, n+1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $n =$______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\dfrac{\cos A - 2\cos C}{\cos B} = \dfrac{2c - a}{b}$.

(1) 求 $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 的值;

(2) 若 $\cos B = \dfrac{1}{4}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 红队队员甲、乙、丙与蓝队队员 A、B、C 进行围棋比赛, 甲对 A、乙对 B、丙对 C 各一盘. 已知甲胜 A、乙胜 B、丙胜 C 的概率分别为 0.6, 0.5, 0.5, 假设各盘比赛结果相互独立.

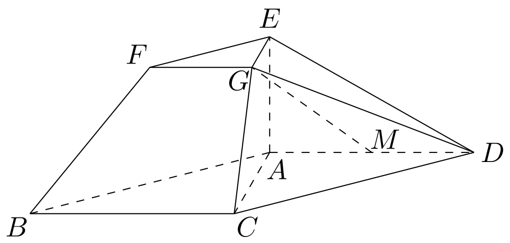
(1) 求红队至少两名队员获胜的概率;

(2) 用 ξ 表示红队队员获胜的总盘数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E\xi$.

19. 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ACB = 90°$, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $FG \parallel BC$, $EG \parallel AC$, $AB = 2EF$.

(1) 若 M 是线段 AD 的中点, 求证: $GM \parallel$ 平面 $ABFE$;

(2) 若 $AC = BC = 2AE$, 求二面角 $A - BF - C$ 的大小.



20. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且 a_1, a_2, a_3 中的任何两个数不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	3	2	10
第二行	6	4	14
第三行	9	8	18

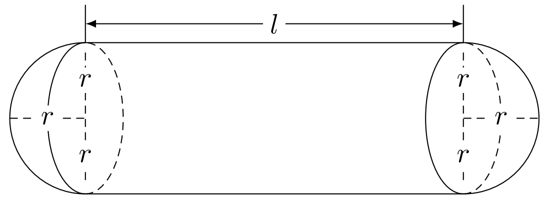
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = a_n + (-1)^n \ln a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

21. 某企业拟建造如图所示的容器 (不计厚度, 长度单位: 米), 其中容器的中间为圆柱形, 左右两端均为半球形, 按照设计要求容器的容积为 $\frac{80\pi}{3}$ 立方米, 且 $l \geqslant 2r$. 假设该容器的建造费用仅与其表面积有关. 已知圆柱形部分每平方米建造费用为 3 千元, 半球形部分每平方米建造费用为 c $(c > 3)$ 千元. 设该容器的建造费用为 y 千元.

(1) 写出 y 关于 r 的函数表达式, 并求该函数的定义域;

(2) 求该容器的建造费用最小时的 r.



22. 已知动直线 l 与椭圆 C: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 交于 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 两不同点, 且 $\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 其中 O 为坐标原点.

(1) 证明: $x_1^2 + x_2^2$ 和 $y_1^2 + y_2^2$ 均为定值;

(2) 设线段 PQ 的中点为 M, 求 $|OM| \cdot |PQ|$ 的最大值;

(3) 椭圆 C 上是否存在三点 D, E, G, 使得 $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle ODG} = S_{\triangle OEG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在, 判断 $\triangle DEG$ 的形状; 若不存在, 请说明理由.