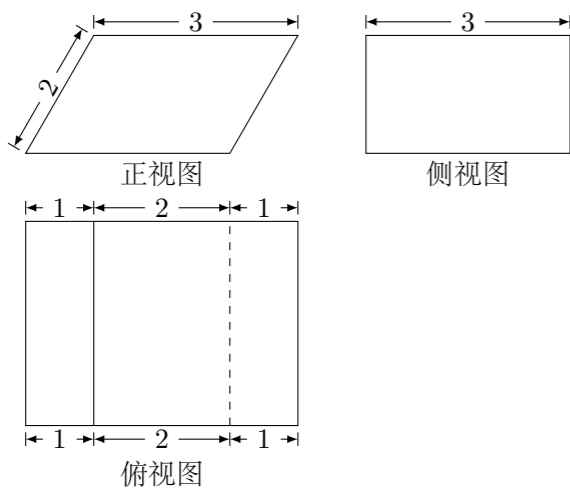


2011 普通高等学校招生考试 (广东卷理)

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $(1+i)z=2$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ ()
 (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $2+2i$ (D) $2-2i$
2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } y = x\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
3. 若非零向量 a, b, c 满足 $a \parallel b$ 且 $a \perp c$, 则 $c \cdot (a+2b) =$ ()
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0
4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, 则下列结论恒成立的是 ()
 (A) $f(x) + |g(x)|$ 是偶函数 (B) $f(x) - |g(x)|$ 是奇函数
 (C) $|f(x)| + g(x)$ 是偶函数 (D) $|f(x)| - g(x)$ 是奇函数
5. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ y \leq 2, \\ x \leq \sqrt{2}y \end{cases}$ 给定.
 若 $M(x, y)$ 为 D 上的动点, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$, 则 $z = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}$ 的最大值为 ()
 (A) $4\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 3
6. 甲、乙两队进行排球决赛. 现在的情形是甲队只要再赢一局就获冠军, 乙队需要再赢两局才能得冠军. 若两队胜每局的概率相同, 则甲队获得冠军的概率为 ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$
7. 如图, 某几何体的正视图 (主视图) 是平行四边形, 侧视图 (左视图) 和俯视图都是矩形, 则该几何体的体积为 ()

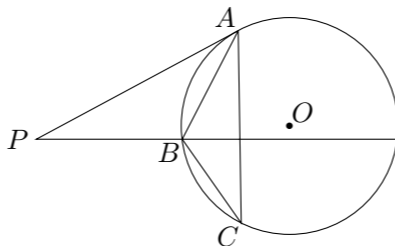


- (A) $6\sqrt{3}$ (B) $9\sqrt{3}$ (C) $12\sqrt{3}$ (D) $18\sqrt{3}$

8. 设 S 是整数集 \mathbf{Z} 的非空子集, 如果对于 $\forall a, b \in S$, 有 $ab \in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 \mathbf{Z} 的两个不相交的非空子集, $T \cup V = \mathbf{Z}$. 且对于 $\forall a, b, c \in T$, 有 $abc \in T$, $\forall x, y, z \in V$, 有 $xyz \in V$. 则下列结论恒成立的是 ()
 (A) T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的
 (B) T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的
 (C) T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的
 (D) T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

二、填空题

9. 不等式 $|x+1| - |x-3| \geq 0$ 的解集是_____.
10. $x\left(x - \frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^4 的系数是_____. (用数字作答)
11. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和等于前 4 项的和. 若 $a_1 = 1$, $a_k + a_4 = 0$, 则 $k =$ _____.
12. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $x =$ _____处取得极小值.
13. 某数学老师身高 176 cm, 他爷爷、父亲和儿子的身高分别是 173 cm, 170 cm 和 182 cm. 因儿子的身高与父亲的身高有关, 该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为_____cm.
14. 已知两曲线参数方程分别为 $\begin{cases} x = \sqrt{5} \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \end{cases} (0 \leq \theta < \pi)$ 和 $\begin{cases} x = \frac{5}{4}t^2, \\ y = t, \end{cases} (t \in \mathbf{R})$, 它们的交点坐标为_____.
15. 如图, 过圆 O 外一点 P 分别作圆的切线和割线交圆于 A, B , 且 $PB = 7$, C 是圆上一点, 使得 $BC = 5$, $\angle BAC = \angle APB$, 则 $AB =$ _____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.
 (1) 求 $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ 的值;
 (2) 设 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f\left(3\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{10}{13}$, $f(3\beta + 2\pi) = \frac{6}{5}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

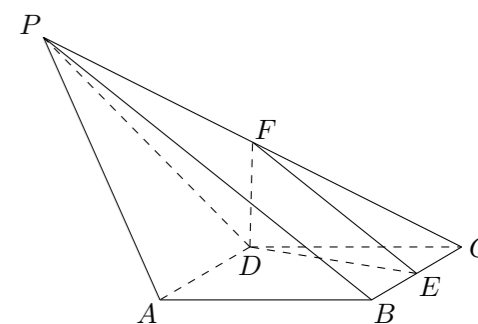
17. 为了解甲、乙两厂的产品质量, 采用分层抽样的方法从甲、乙两厂生产的产品中分别抽取 14 件和 5 件, 测量产品中微量元素 x, y 的含量 (单位: 毫克). 下表是乙厂的 5 件产品的测量数据:

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180
y	75	80	77	70	81

- (1) 已知甲厂生产的产品共有 98 件, 求乙厂生产的产品数量;
- (2) 当产品中的微量元素 x, y 满足 $x \geq 175$ 且 $y \geq 75$ 时, 该产品为优等品. 用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量;
- (3) 从乙厂抽出的上述 5 件产品中, 随机抽取 2 件, 求抽取的 2 件产品中优等品数 ξ 的分布列及其均值 (即数学期望).

18. 如图, 在锥体 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, $PA = PD = \sqrt{2}$, $PB = 2$, E, F 分别是 BC, PC 的中点.

- (1) 证明: $AD \perp$ 平面 DEF ;
- (2) 求二面角 $P-AD-B$ 的余弦值.



19. 设圆 C 与两圆 $(x + \sqrt{5})^2 + y^2 = 4$, $(x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 4$ 中的一个内切, 另一个外切.

(1) 求 C 的圆心轨迹 L 的方程.

(2) 已知点 $M\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $F(\sqrt{5}, 0)$, 且 P 为 L 上动点, 求 $||MP| - |FP||$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

20. 设 $b > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = b$, $a_n = \frac{nb a_{n-1}}{a_{n-1} + 2n - 2}$ ($n \geq 2$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对于一切正整数 n , $a_n \leq \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}} + 1$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 上, 给定抛物线 $L: y = \frac{1}{4}x^2$. 实数 p, q 满足 $p^2 - 4q \geq 0$, x_1, x_2 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根, 记 $\varphi(p, q) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

(1) 过点 $A\left(p_0, \frac{1}{4}p_0^2\right)$ ($p_0 \neq 0$) 作 L 的切线交 y 轴于点 B . 证明: 对线段

AB 上的任一点 $Q(p, q)$, 有 $\varphi(p, q) = \frac{|p_0|}{2}$;

(2) 设 $M(a, b)$ 是定点, 其中 a, b 满足 $a^2 - 4b > 0$, $a \neq 0$. 过点 $M(a, b)$ 作 L 的两条切线 l_1, l_2 , 切点分别为 $E\left(p_1, \frac{1}{4}p_1^2\right)$, $E'\left(p_2, \frac{1}{4}p_2^2\right)$, l_1, l_2 与 y 分别交于 F, F' . 线段 EF 上异于两端点的点集记为 X . 证明: $M(a, b) \in X \Leftrightarrow |p_1| > |p_2| \Leftrightarrow \varphi(a, b) = \frac{|p_1|}{2}$;

(3) 设 $D = \left\{ (x, y) \mid y \leq x - 1, y \geq \frac{1}{4}(x + 1)^2 - \frac{5}{4} \right\}$, 当点 (p, q) 取遍 D 时, 求 $\varphi(p, q)$ 的最小值 (记为 φ_{\min}) 和最大值 (记为 φ_{\max}).