2011 普通高等学校招生考试 (全国卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $N=\{1,\ 3,\ 5\}$, $P=M\cap N$, 则 P 的子集共有 ( )

(A) 2 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 8 个

2. 复数 $\dfrac{5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $2-\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $-2+\mathrm{i}$ (D) $-1+2\mathrm{i}$

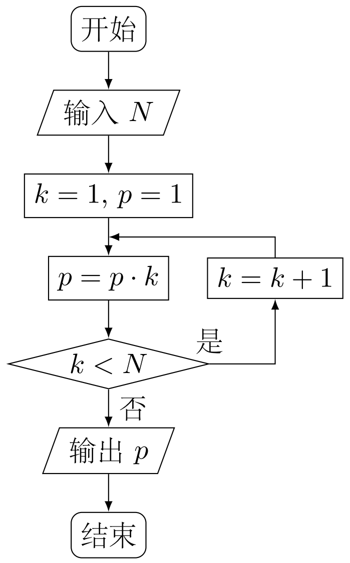
3. 下列函数中, 既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是 ( )

(A) $y=x^3$ (B) $y=|x|+1$ (C) $y=-x^2+1$ (D) $y=2^{-|x|}$

4. 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 执行如图的程序框图, 如果输入的 N 是 6, 那么输出的 p 是 ( )



(A) 120 (B) 720 (C) 1440 (D) 5040

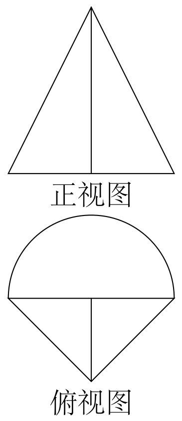
6. 有 3 个兴趣小组, 甲、乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相同, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 ( )

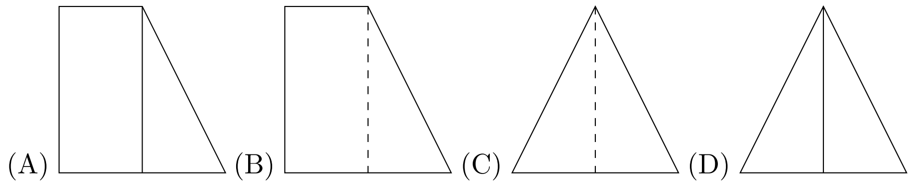
(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

7. 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y=2x$ 上, 则 $\cos 2\theta=$ ( )

(A) $-\dfrac{4}{5}$ (B) $-\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

8. 在一个几何体的三视图中, 正视图和俯视图如下图所示, 则相应的侧视图可以为 ( )





9. 已知直线 l 过抛物线 C 的焦点, 且与 C 的对称轴垂直, l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=12$, P 为 C 的准线上一点, 则 $\triangle ABP$ 的面积为 ( )

(A) 18 (B) 24 (C) 36 (D) 48

10. 在下列区间中, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+4x-3$ 的零点所在的区间为 ( )

(A) $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ (C) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, 则 ( )

(A) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(B) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

(C) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(D) $y=f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

12. 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2, 当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)=x^2$, 那么函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=|\lg x|$ 的图象的交点共有 ( )

(A) 10 个 (B) 9 个 (C) 8 个 (D) 1 个

二、填空题

13. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的单位向量, k 为实数, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直, 则 $k=$______.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9,\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为______.

15. $\triangle ABC$ 中, $B=120^\circ$, $AC=7$, $AB=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

16. 已知两个圆锥有公共底面, 且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上. 若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\dfrac{3}{16}$, 则这两个圆锥中, 体积较小者的高与体积较大者的高的比值为______.

三、解答题

17. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{3}$, 公比 $q=\dfrac{1}{3}$.

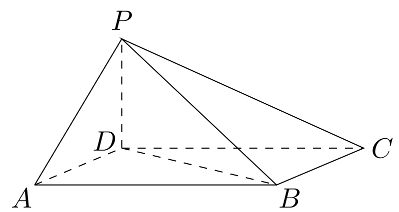
(1) 若 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明: $S_n=\dfrac{1-a_n}{2}$;

(2) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2AD$, $PD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1) 证明: $PA\perp BD$;

(2) 设 $PD=AD=1$, 求棱锥 $D-PBC$ 的高.



19. 某种产品的质量以其质量指标值衡量, 质量指标值越大表明质量越好, 且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方 (分别称为 A 配方和 B 配方) 做试验, 各生产了 100 件这种产品, 并测量了每件产品的质量指标值, 得到了下面试验结果:

A 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	$[90,94)$	$[94,98)$	$[98,102)$	$[102,106)$	$[106,110]$
频数	4	12	42	32	10

(1) 分别估计用 A 配方, B 配方生产的产品的优质品率;

(2) 已知用 B 配方生产一件产品的利润 y (单位: 元) 与其质量指标值 t 的关系式为 $y=\begin{cases}-2, & t<94,\\ 2, & 94\leqslant t<102,\\ 4, & t\geqslant 102.\end{cases}$ 估计用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 的概率, 并求用 B 配方生产的上述 100 件产品平均一件的利润.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A, B 两点, 且 $OA\perp OB$, 求 a 的值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

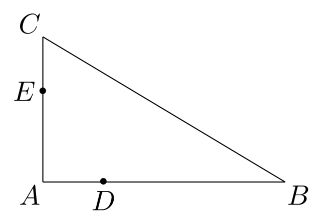
(1) 求 a, b 的值;

(2) 证明: 当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

22. 如图, D, E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上的点, 且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m, AC 的长为 n, AD, AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.

(1) 证明: C, B, D, E 四点共圆;

(2) 若 $\angle A=90°$, 且 $m=4$, $n=6$, 求 C, B, D, E 所在圆的半径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha,\end{cases}$ (α 为参数), M 是 C_1 上的动点, P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$, P 点的轨迹为曲线 C_2.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A, 与 C_2 的异于极点的交点为 B, 求 $|AB|$.

24. 设函数 $f(x)=|x-a|+3x$, 其中 $a>0$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集;

(2) 若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant -1\}$, 求 a 的值.